

Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 148 – Pubblicato il 06 – 06 – 2010

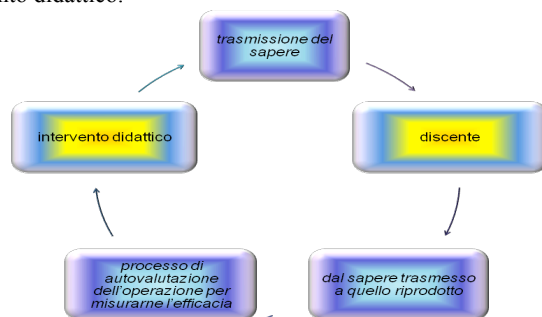
## Un'ipotesi di autovalutazione a conclusione di un percorso didattico

di Carmelo Campagna<sup>[\*]</sup>, Franca Rossetti<sup>[\*\*]</sup>,  
Carmela Petruzzo<sup>[\*\*\*]</sup>

La nostra proposta riguarda l'organizzazione e la valutazione di un percorso didattico teso a recuperare conoscenze pregresse al fine di affrontare, come previsto dal piano di lavoro, l'argomento dello studio di funzione, in una classe quarta articolata di un Istituto superiore della nuova provincia di Monza e Brianza. Il recupero è avvenuto in itinere, in una classe demotivata, con differenti libri di testo e obiettivi comuni solo in parte; debiti formativi saldati solo formalmente. Il lavoro è stato organizzato in base ai seguenti punti

- *La dimensione didattica*
- *La dimensione culturale (breve parentesi storica sul concetto di funzione)*
- *La dimensione operativa (dalle funzioni matematiche a quelle empiriche)*
- *Considerazioni finali*

Circa il primo punto è stato richiamato il processo circolare che conduce all'autovalutazione per mettere in evidenza come non tutto il sapere trasmesso venga riprodotto dai discenti e, quindi, come un processo di autovalutazione sia premessa indispensabile per ogni intervento didattico.



Il percorso è stato progettato su misura, nel senso che dapprima si è proceduto al riallineamento delle conoscenze delle rispettive preparazioni di base quindi l'intervento ha mirato alla acquisizione dei nuclei fondanti ritenuti prerequisiti rispetto all'obiettivo da raggiungere che, nella fattispecie, ha riguardato il confronto tra funzioni matematiche e funzioni empiriche:

- Sistemi di equazioni;*
- Sistemi di disequazioni;*
- Piano cartesiano;*
- Esponenziali e logaritmi;*
- Conoscenze di analisi;*
- Interpolazione matematica e statistica.*

La progettazione si è rivelata subito complicata per vari motivi, si è voluto tenere conto:

- dei differenti stili di apprendimento all'interno del gruppo classe; stili:

- *visivo verbale e non verbale;*
- *uditivo;*
- *cinestesico;*
- *analitico;*
- *globale;*
- *Individuale;*
- *di gruppo.*

- delle difficoltà inerenti l'apprendimento della disciplina:

- ➔ *apprendimento comunicativo;*
- ➔ *apprendimento di concetti;*
- ➔ *apprendimento di algoritmi;*
- ➔ *apprendimento di "strategie".*

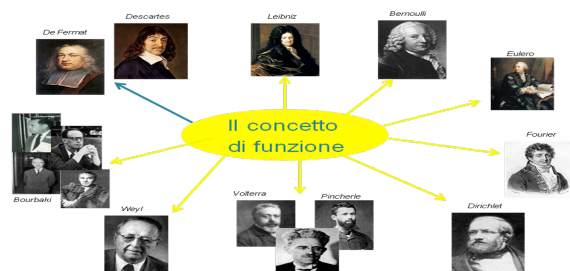
- dei problemi legati alla complessità dell'azione didattica:

- ✓ nel valutare conoscenze
  - ❖ *Dichiarative (sapere cosa)*
  - ❖ *Procedurali (sapere come)*
  - ❖ *Condizionali (sapere il perché)*
- ✓ nell'individuare abilità
  - ❖ *nello scoprire regolarità matematiche;*
  - ❖ *nel particolare rizzare;*
  - ❖ *nell'interpretare descrizioni di idee matematiche;*
  - ❖ *nel descrivere idee matematiche;*
  - ❖ *nel fare inferenze logiche;*
  - ❖ *nell'assiomatizzare.*
- ✓ e competenze quali
  - ❖ *Argomentare;*
  - ❖ *Comunicare;*
  - ❖ *Modellizzare;*
  - ❖ *Rappresentare;*
  - ❖ *Usare pluralità di linguaggi;*
  - ❖ *Pensare e ragionare;*
  - ❖ *Usare sussidi e strumenti.*

Il concetto di funzione è stato proposto nella sua evoluzione storica, quindi riprendendo la definizione data da Dirichlet nel 1829, si è fatta distinzione tra funzioni matematiche e funzioni empiriche con l'intento di "modellizzare" un problema reale con l'obiettivo di:

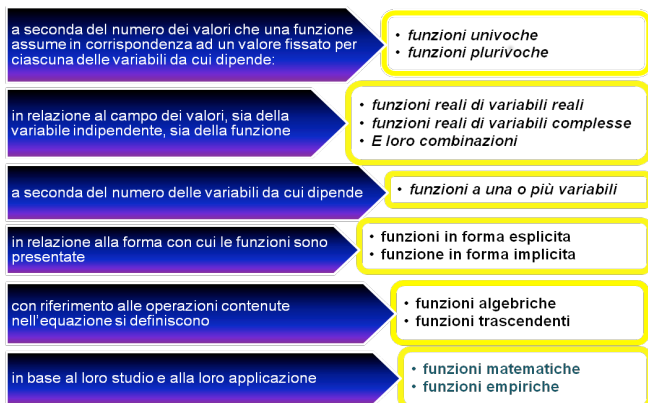
- ❖ Da un lato mettere in risalto gli **aspetti teorici della disciplina** (matematica generale e applicata).
- ❖ Dall'altro cogliere l'occasione per sperimentare aspetti valutativi coinvolgenti la **rilevazione di competenze**.

Prima di presentare due esempi significativi tratti dalla realtà dell'istituto, sono stati richiamati alcuni personaggi che hanno contribuito alla storia del concetto.



L'idea del concetto nasce nel 1636 con De Fermat e Descartes che risolvono con l'algebra problemi di geometria e pongono in relazione analitica le coordinate  $x$  e  $y$  di un punto generico della linea; ma non tutte le linee si ritenevano idonee a generare funzioni, per esempio, si scartavano quelle tracciate in modo arbitrario. Anche se la prima definizione si trova in uno scritto di Leibniz del 1694, è nel 1718 con J. Bernoulli che per la prima volta si ipotizza la dipendenza tra le variabili; nel 1748 Eulero precisa la definizione di Bernoulli e a lui si deve la scrittura  $y = f(x)$ . Dopo il 1807 si fa pressante la necessità di generalizzare il concetto tanto che nel 1821 Fourier afferma che "ogni curva piana arbitrariamente tracciata e incontrata in un solo punto al più da ogni parallela all'asse delle  $y$ , è rappresentabile, in un intervallo finito, con una serie trigonometrica."; è del 1829,

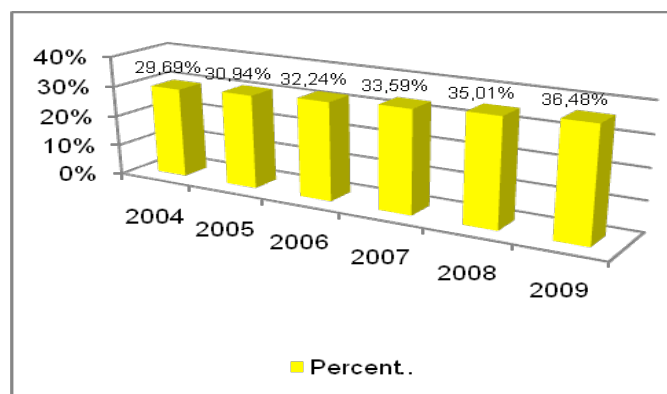
con Dirichlet, la definizione di funzione univoca, universalmente accettata, presente su quasi tutti i testi in adozione nelle nostre scuole superiori. L'ulteriore generalizzazione del concetto avviene più tardi, nel 1884 con Volterra, Pincherle e Fréchet per i quali il concetto di funzione risulta indipendente tanto da quello di espressione analitica tanto da quello di curva. Ma, a riprova della difficoltà nel definire il concetto di funzione nel 1927 Weyl affermava che "Nessuno ha mai saputo spiegare cosa sia una funzione ..."; ciò per affermare che la questione è complessa e ricondurre i vari approcci a una unica definizione può essere scorretto. Infatti, nel 1939 con Bourbaki la funzione è vista nell'ambito della teoria degli insiemi e trova collocazione, anche attualmente, in molti testi in uso nel biennio. Dopo questa parentesi è stato possibile tentare una classificazione:



Passando alla dimensione operativa del percorso per interpretare i dati empirici relativi all'andamento dei debiti formativi in matematica e alle attività extradidattiche dell'ultimo quinquennio rilevati nell'Istituto superiore in questione sono state utilizzate la funzione esponenziale e l'iperbole allo scopo di pervenire alle previsioni per l'anno in corso.

Osservando i dati

Anni	Percentuali
2004	26,69
2005	30,94
2006	32,24
2007	33,59
2008	35,01
2009	36,48



si può notare come l'andamento è tendenzialmente esponenziale pertanto è stata usata la funzione  $y = ab^x$  con  $a > 0, b > 0, b \neq 1$ . Infatti, se  $x_i, y_i$  sono  $n$  osservazioni allora

$$f(a,b) = \text{Min} \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - ab^{x_i})^2 \right]$$

La funzione  $y = ab^x$  è stata linearizzata trasformandola come  $\log y = \log a + x \log b$  che applicata alle coppie di punti ha restituito:  $\log y_i = \log a + x_i \log b$ . Quindi, posto  $\log y_i = z_i, \log a = q$  e  $\log b = m$  si è ottenuto  $z_i = q + mx_i$ .

Da cui

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n \log y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \log y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \log y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n \log x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Quindi si è pervenuti a  $b = 10^m$  e  $a = 10^q$  e che sono i parametri cercati.

Anni	$x_i$	% $y_i$	$\log y_i$	$x_i^2$	$x_i \log y_i$	$\bar{y}_i$
2004	1	29,69	1,4726	1	1,47261	28,49
2005	2	30,94	1,4905	4	2,98104	30,93
2006	3	32,24	1,5084	9	4,52519	32,23
2007	4	33,59	1,5262	16	6,10484	33,59
2008	5	35,01	1,5442	25	7,72096	34,1
2009	6	36,48	1,5621	36	9,37233	36,47
totali	21		9,104	91	32,177	195,81

Da cui:

$$n = 6, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 21, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 91,$$

$$\sum_{i=1}^n \log y_i \cong 9,103982, \quad \sum_{i=1}^n (x_i \log y_i) \cong 32,176965$$

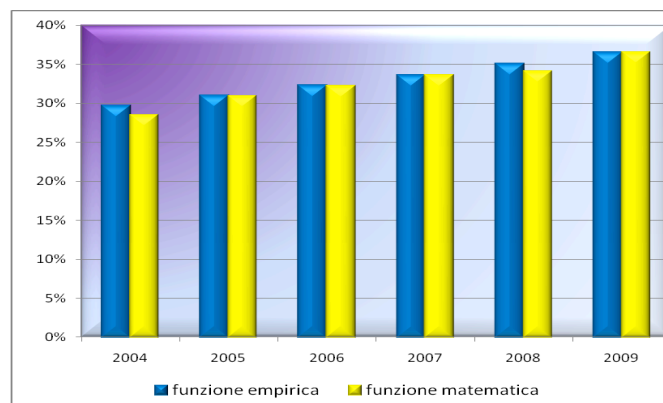
$q \cong 1,4547$  e  $m \cong 0,01788$ , perciò:  $y \cong 28,49 \cdot 1,042^x$ .

Proiezione per l'anno in corso?

$$y_7 \cong 28,49 \cdot 1,042^7 \cong 38\%$$

Confrontando la funzione empirica con quella matematica si è constatata la validità della funzione utilizzata:

Anni	Funzione empirica	Funzione matematica
2004	29,69	28,49
2005	30,94	30,93
2006	32,24	32,23
2007	33,59	33,59
2008	35,01	34,1
2009	36,48	36,47



[Segue al numero 149]

Questo lavoro è stato presentato dagli autori al Congresso nazionale della Mathesis, tenutosi a Livorno, presso l'Accademia Navale, in data 15-16-17 aprile 2010. Pubblicato per gentile concessione della Mathesis Nazionale.

[\*] già consigliere nazionale della Mathesis - [campagnac@libero.it](mailto:campagnac@libero.it)

[\*\*] docente di Matematica applicata presso ITIS "Henseberger" di Monza

[\*\*\*] docente di Matematica applicata presso I.P.S.S.C.T.A.R. "A. Olivetti" di Monza