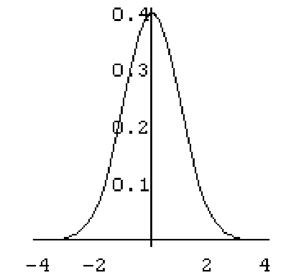
# MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona



Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 – e-mail: lcorso@itisgmarconi.vr.it - Numero 15 - marzo 1999


## Sulla probabilità di un evento nel continuo

di Luciano Corso

*[Segue dal numero 14]* Se ω è un punto sull'intervallo (0,1] di **R**, P(X≤ω)= F(ω)=ω è la probabilità di avere un punto che cada prima o al massimo in ω.

La costruzione su un intervallo Ω di una partizione di eventi A è in realtà un artificio per semplificare il problema dell'assegnazione di una probabilità di un evento generico riferibile ad uno spazio Ω generico. La generalizzazione però è facile poiché ogni intervallo di misura qualsiasi, anche se discontinuo in un numero finito di punti (si parla di «continuità quasi ovunque») può essere messo – come è noto - in corrispondenza biunivoca con un intervallo (0,1]. A questo punto occorre costruire un sistema di eventi completo cui possa essere riferibile un qualsiasi evento pensabile a partire dallo spazio campionario Ω. Per esempio, dato l'evento A, io posso pensare all'evento ¬A∉Ω in genere; se consideriamo l'intervallo (0,1] e la partizione di fig.1, foglio n. 14, e se l'evento A=(001), l'evento ¬A={(000),(010),(100),(011),(101),(110), (111)} non appartiene ad Ω. Eppure ¬A è pensabile in uno schema di probabilità. A partire da Ω si costruisce allora quella che si dice una σ-algebra o anche classe additiva di eventi. Si prendono in considerazione insiemi più ampi di eventi che comprendono gli eventi di Ω e ogni altro evento che risulta da unioni di eventi di Ω o da loro negazioni e da negazioni di eventi di Ω o da loro unioni, o in modo tale che questa nuova classe di eventi sia chiusa rispetto alle due operazioni di unione (∪) e di negazione (¬) (e sappiamo che, a queste condizioni, anche l'operazione di intersezione (∩) è chiusa). In particolare la negazione di Ω è l'insieme ∅. Poiché ∅ è il complementare di Ω, P(∅)=1-P(Ω)=0. Ci accorgiamo che nell'intervallo (0, 1] non è stato considerato lo 0: lo aggiungiamo ora come elemento particolare, nel rispetto dell'assioma (6) [foglio n.14] e di quanto detto ora. Una σ-algebra nel continuo viene detta "borelliano" o insieme di Borel. Le σ-algebre (o σ-campi) per essere borelliani devono essere costituite da famiglie numerabili di plurintervalli di partizioni di Ω chiuse rispetto alle operazioni di ∪ e ¬. Si richiede, quindi, una estensione dell'ambiente in cui viene definita la misura di probabilità. Il passaggio impone che l'assioma dell'additività su insiemi di plurintervalli (eventi) finiti valga anche per insiemi infiniti di eventi, purché numerabili.; cioè l'estensione fa passare dall'assioma

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{8}$$

all'assioma

$$\left[P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\right]. \tag{9}$$

La famiglia di partizioni numerabili di Ω non copre tutte le possibilità: mancano le partizioni non numerabili di Ω alle quali non è possibile applicare l'assioma esteso (9) e quelle numerabili ma non chiuse rispetto alle operazioni di ∪, ¬ e ∩. Nonostante ciò i borelliani coprono tutte le esigenze della ricerca scientifica. Indicando con $\mathfrak{I}$ un borelliano si può scrivere per quanto detto:

$$\mathfrak{I}\text{: } \Omega\in \mathfrak{I},\ [\forall \{A_n\}\in \mathfrak{I},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}],\ [\forall A\in \mathfrak{I},\ \neg A\in \mathfrak{I}] \tag{10}$$

che diventa l'ambiente idoneo ad accettare operazioni di misura sugli eventi con l'applicazione *P*. Siamo allora arrivati a definire uno spazio di probabilità come la terna {Ω, $\mathfrak{I}$, P}. Ancora la teoria non è completa, ma ci sono le premesse per poterla sistemare bene. [*continua al numero 17*].


*Bibliografia: Patrick Billingsley, Probability and Measure, J. Wiley & Sons, New York, 1995 – Giorgio Dall'Aglio, Calcolo delle probabilità, Zanichelli, Bologna, 1991 – Luciano Daboni, Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica, UTE T, Torino, 1980 - Giorgio Letta, Probabilità elementare, Zanichelli, Bologna, 1993*


## Ai lettori

Se non siete soci Mathesis di Verona, vi invitiamo a versare 12.000 lire per 12 numeri mediante vaglia bancario intestato a Corso Luciano c/o Mathesis Verona - Via IV Novembre, 11,b – 37126 Verona – specificando bene indirizzo con cap di chi effettua il versamento. La collaborazione alla realizzazione del presente foglio è aperta a tutti. Si invia un articolo di una colonna al massimo su un argomento nel campo delle matematiche pure o applicate (anche di fisica, chimica, genetica, economia, biometrica, ecologia). L'argomento deve avere una veste personale e per quanto possibile essere originale. È sempre gradita la citazione della fonte e una nota (breve) bibiografica.

## La quantizzazione dei reali modulo π

di Arnaldo Vicentini

*[ Segue dal n. 14]* Sviluppiamo tan(x) in frazione continua:

$$tan(x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{-x^2}{f(x)}} \quad dove: \quad f(x)=3+\cfrac{-x^2}{5+\cfrac{-x^2}{7+\cfrac{-x^2}{9+...}}} \tag{1}$$

Per m abbastanza grande, si può troncare la frazione continua all'm-esimo denominatore sostituendolo con $(2\cdot m-1)\cdot x^2/(2\cdot m+1)$. Poniamo f(x,m) l'approssimazione di f(x) così ottenuta. Poiché tan(x) si annulla in ogni multiplo di π, diciamo x=k·π, ma per x≠0 il numeratore non è nullo, in x=k·π, tranne k=0, diventa infinito il denomina-tore $1-x^2/f(k\cdot\pi)$; ossia si annulla f(k·π). In effetti, dalla (1) si ha:

$$tan(x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{-x^2}{f(x)}} \iff f(x)=\frac{x^2\cdot tan(x)}{tan(x)-x} \tag{2}$$

In x=k·π, (tranne x=0), f(x) vale 0; f(x) tende a 3 per x tendente a 0, [ma f(0,∞) vale 3]. La ricerca del multiplo di π prossimo a x≠0 è così ridotta alla ricerca dello zero di f(x,m) prossimo ad x con m abbastanza grande.

## Da Galileo alla «perdita della certezza»

di Carlo Veronesi

Sul numero 10 di questo foglio mensile Luciano Corso (facendo seguito ad altre note pubblicate in numeri precedenti) accennava alla non modernità di alcune concezioni di Galileo. Infatti, secondo l'epistemologia attuale, le teorie scientifiche sono strumenti provvisori e confutabili. Galileo invece credeva nell'esistenza di leggi di natura e nella capacità della mente umana di comprenderle e di ricostruirle. La scienza galileiana, frutto di “dimostrazioni” e di “sensate esperienze”, faceva riferimento all’esistenza di una struttura matematica dell’universo e alla certezza della conoscenza matematica. Famosissima, a questo proposito, è la frase de *Il Saggiatore* secondo cui “Il grandissimo libro che ci sta aperto dinanzi agli occhi, l’universo, […] è scritto il lingua matematica”. Ma famosa è anche la distinzione galileiana fra conoscenza estensiva ed intensiva. Secondo questa distinzione la mente umana non può eguagliare “estensivamente” la mente divina che conosce tutte le infinite verità aritmetiche e geometriche, ma “intensivamente”, per quelle poche che l’intelletto umano può intendere, la certezza che possiamo raggiungere eguaglia la divina (*Dialogo sopra i due massimi sistemi del modo*).

In un libro fortunato (*Matematica: la perdita della certezza, Mondadori, Milano, 1985*), Morris Kline rileva che questa posizione privilegiata della matematica nello studio della natura non fu messa in discussione, dagli scienziati dei secoli successivi, fino alla metà dell’Ottocento, quando la scoperta delle geometrie non euclidee fece sorgere il dubbio su quale fosse la vera geometria usata per disegnare il mondo. Nello stesso libro si parla anche degli sviluppi della matematica del Novecento, che vanno dalla crisi dei fondamenti ai teoremi di Gödel, in seguito ai quali la matematica perse, dopo il privilegio di rispecchiare la struttura necessariamente vera dell’universo, anche ogni aspirazione ad una autofondazione certa. La conclusione di Kline è che si debba estendere alla matematica lo stesso carattere di provvisorietà che, seguendo Popper, viene attribuito alle scienze empiriche. Questa concezione neoempirista della matematica fa riferimento anche, e specialmente, alla epistemologia di Imre Lakatos (l’allievo di Popper che si occupò più diffusamente della matematica) e alla sua opera principale (*Dimostrazioni e confutazioni, Feltrinelli, Milano, 1979*).

Al problema della certezza in matematica fu dedicato, nel 1989, l’incontro inaugurale del Gruppo di Epistemologia della Matematica costituito dal compianto professor Francesco Speranza. Per le relazioni di questo convegno rimandiamo il lettore interessato al volume Epistemologia della Matematica: seminari 1989-1991, a cura di F. Speranza, Quaderno C.N.R. in 10, 1992. Anche in un articolo pubblicato più recentemente su Le Scienze (anno 1993, n° 304) e intitolato *Morte della dimostrazione*, l’autore, John Horgan, sostiene la tesi che l’incertezza si sta insinuando, forse irrimediabimente, anche nella matematica. Questo perché l’estrema complessità delle dimostrazioni della recente ricerca fa sorgere dubbi sulla loro affidabilità. Nell’articolo si nota che le dimostrazioni comprensibili da cima a fondo sono ormai scomparse dalla ricerca matematica attuale. La recente dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat, ad opera di Andrew Wiles, occupa oltre 200 pagine ed è valutabile solo da pochi specialisti. Altre dimostrazioni (come quella del Teorema dei 4 colori) sono state portate a termine solo con l'aiuto del computer e hanno richiesto passaggi così lunghi e complessi da risultare proibitivi per qualunque essere umano.

## Sulle espressioni matematiche celebri che hanno cambiato il modo di pensare

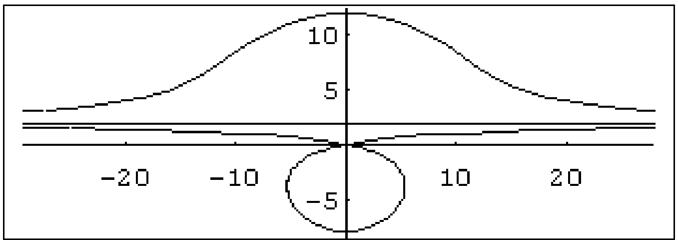
di Luciano Corso

*[Segue dal n. 13]* I 5 postulati di Giuseppe Peano (matematico italiano 1858-1932) – apparsi per la prima volta nel 1889 nell’opera “*Arithmetices principia nova methodo exposita*” - definiscono univocamente degli enti che possono essere poi identificati con i numeri naturali. Al tempo di Peano ( si noti: in Italia il suo nome è quasi sconosciuto dalla cosiddetta cultura ufficiale e potrei raccontare degli aneddoti divertenti sugli imbarazzi degli uomini colti di fronte a mie provocazioni riguardo il suo nome e a ciò che ha fatto), nessuno aveva le idee chiare circa i numeri naturali. Peano definisce i numeri naturali nel modo seguente:
Premessa: - Si devono dare per primitive le idee di «numero» ($x\in \mathbf{N}$), «successore» ($\sigma$) e «zero» (0).
I postulati sono: (7)

1) Zero è un numero: ($0\in \mathbf{N}$);
2) Il successore di un numero, è un numero: $(x\in \mathbf{N})\to(\sigma x\in \mathbf{N})$, $\forall x$;
3) Zero non è successore di alcun numero: $\forall x$, $(x\in \mathbf{N})\to(\sigma x\neq 0)$;
4) A numeri distinti corrispondono successori distinti: $\forall x,y$, $[x \in \mathbf{N}, y\in \mathbf{N}, x \neq y]\to[\sigma x \neq \sigma y]$;
5) Se P(.) è una proprietà qualsiasi e si dimostra che essa vale in 0 e che se vale in x, vale anche in $\sigma x$, allora essa vale $\forall x\in \mathbf{N}$: $\forall P$, $[P(0)\wedge\forall x(P(x)\to P(\sigma x))]\to[\forall x, P(x)]$.

Il 5° postulato è il famoso principio di induzione di Peano, usato ed abusato per dimostrare, pericolosamente, quasi tutto!

*Bibliografia: B. Russell, Introduzione alla filosofia matematica, Newton (tascabili), Roma, 1995 – Carl B. Boyer, Storia della matematica, Mondadori (Oscar), Milano, 1990*




La Concoide di Nicomede

La curva è a forma di conchiglia e la sua equazione in coordinate polari è uguale a:
$r = a/\cos(t-\pi/2)+k$; ove a=2, k=10 e $\{-\pi \le t \le\pi\}$.

*Bibliografia: Luciano Cresci, «Le curve celebri», Muzzio ed., Padova, 1998*

## Una brutta storia di polli e … di politici

Se i politici conoscessero meglio la statistica non farebbero certo riferimento al solito esempio dei polli per denigrarne la portata cognitiva. L’esempio – dicono i politici - che nega credibilità scientifica alla statistica è che se una popolazione costituita solo da due individui, Tizio e Caio, consuma due polli al giorno, ma Tizio non ne mangia ($x_1$=0p), mentre Caio ne mangia due *($x_2$=2p)*, in media risulterà che il consumo di polli a testa di quella popolazione è di un pollo al giorno ($\bar{x}$= *1p*). Così sembra che in quella popolazione gli individui stiano tutti bene, mentre in realtà uno patisce la fame, e l’altro rischia l’infarto. Ma la statistica insegna ad usare altri indici statistici per cogliere in modo profondo l’informazione contenuta nei dati che si stanno analizzando: la dispersione media dei dati intorno alla media aritmetica, per esempio. Una sua misura è la deviazione standard ($\sigma$) o scarto quadratico medio. Nel nostro caso essa risulta pari a:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{(0p-1p)^2+(2p-1p)^2}{2}}=1p$$

C’è, quindi, la dispersione media di un pollo in quella popolazione. Se si vuole, si può anche calcolare l’asimmetria presente in questa popolazione. Come misura dell’asimmetria prendiamo la statistica $\gamma_1$ di Fisher. Essa è uguale a:
$\gamma_1=\bar{\mu}_3/\sigma^3$ ove $\bar{\mu}_3=M(x-\bar{x})^3$.
Nel nostro caso il momento centrale di terzo ordine è:

$$\bar{\mu}_3=\frac{1}{2}\cdot\left[(0p-1p)^3+(2p-1p)^3\right]=0$$

e quindi $\gamma_1=0$. Ciò significa che c’è perfetta simmetria assiale dei dati rispetto alla media aritmetica. Poiché i dati sono due, è ovvio che ciò comporta come conseguenza che uno dei due individui della popolazione mangia due polli e l’altro non ne mangia. Non sappiamo ancora se è Caio o Tizio che morirà di fame, ma sappiamo quanto basta per attuare interventi intelligenti sulla popolazione. Così la storiella dei due polli dimostra solo una cosa: quando non si conosce, meglio tacere!