ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 152 – Pubblicato il 10 – 11 – 2010

Coniche omologiche

di Nazario Magnarelli

Teorema: Se due coniche di un piano si toccano in un punto esistono due omologie, generalmente distinte, che trasformano una conica nell'altra.

Illustriamo il teorema con il seguente esercizio. Un'ellisse Γ è tangente internamente ad una circonferenza K in un punto fisso C ed è tagliata da questa secondo un arco per i cui estremi passa una retta (asse) u. Le rette condotte dal punto C tagliano quindi le coniche Γ e K (o i loro archi) rispettivamente nei punti A, A', o B, B'.

Dato un riferimento cartesiano Oxy , sia:

1) Γ: $x^2 + 2y^2 = 9$ l'equazione dell'ellisse;

2) K: $2x^2 + 2y^2 - 3x - 9 = 0$ l'equazione della circonferenza;

3) $C(3;0)$ il punto di tangenza delle due coniche.

Si vede subito che: a) l'ellisse Γ taglia l'asse x nei punti $A(-3;\ 0)$ e $C(3;\ 0)$; b) la circonferenza K taglia l'asse x nei punti $A'(-3/2;\ 0)$ e nel precedente punto $C(3;\ 0)$, che pertanto è il punto di contatto fra le due coniche; c) le due coniche si intersecano in due punti dell'asse y (fig. 19).

Passiamo a un sistema di coordinate omogenee $Ox_1x_2x_3$ e troviamo le equazioni dell'omologia che ha il centro $C(3,\ 0,\ 1)$, come asse u la retta $x_1 = 0$ (asse y) e come corrispondenti i punti $A(-3;\ 0;\ 1)$ e $A'(-3/2;\ 0;\ 1)$ (essa è perfettamente individuata da questi elementi). Per individuare l'asse dell'omologia basta assegnare due punti giacenti su di esso, esempio $(0;\ 1;\ 1)$ e $(0;\ -1;\ 1)$. Trascuriamo di spiegare che l'asse $x_1=0$ è luogo di punti uniti.

Imponendo le varie condizioni, si ha un sistema risolvente di 12 equazioni in 13 incognite. Poiché i coefficienti a_{ik} sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità, possiamo risolvere il sistema dando a uno di essi un valore opportuno.

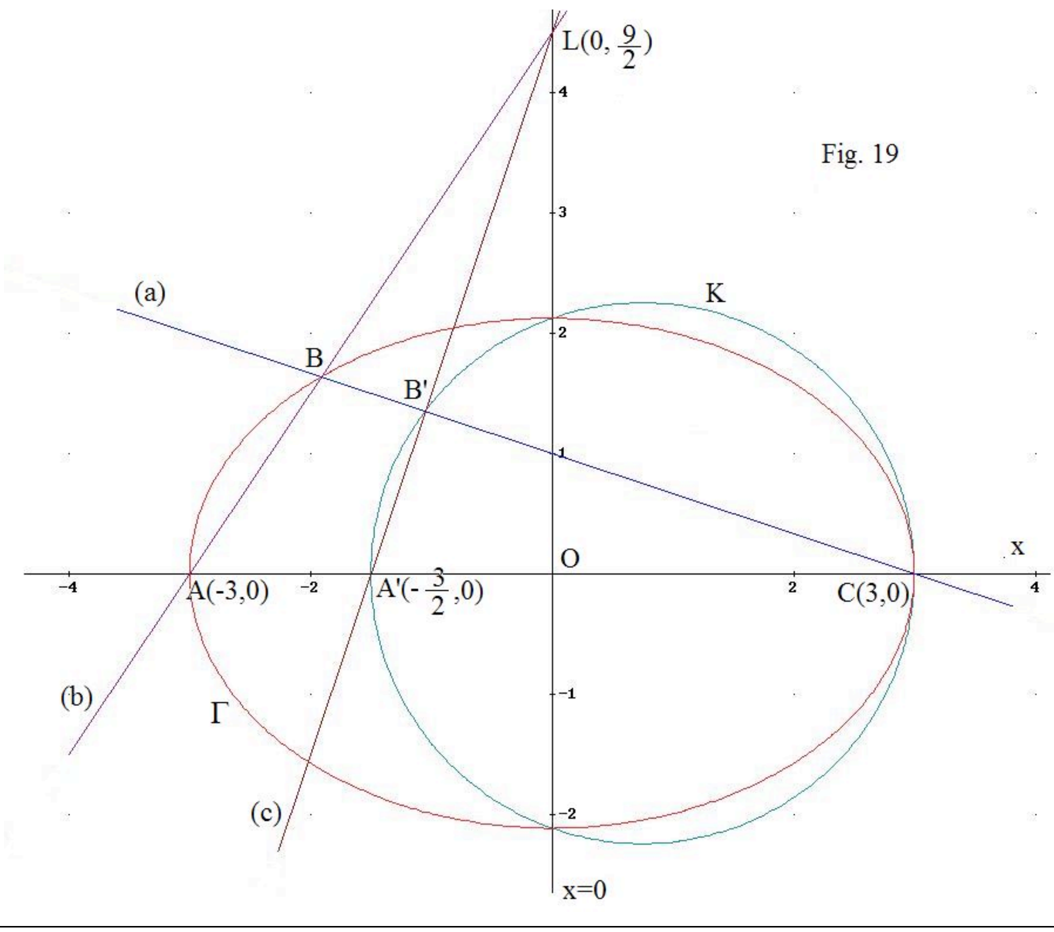

Fig. 19

Nel sistema (4), Dalle equazioni segnate con il punto (•) subito si ricava $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$. Posto poi $a_{11} = 1$, dalla prima e dalla terzultima equazione del sistema si ricava $\rho = 1$ e $(1/2)t = a_{11} = 1$, da cui $t = 2$. Inoltre, le equazioni segnate con asterisco (*) subito ci danno $a_{21} = 0$, $a_{23} = 0$. Procedendo nei calcoli, possiamo trovare tutti i coefficienti e quindi le equazioni dell'omologia:

(T) $\rho x_1' = x_1 \quad , \quad \rho x_2' = \frac{3}{2}x_2 \quad , \quad \rho x_3' = -\frac{1}{6}x_1 + \frac{3}{2}x_3 .$

Facciamo vedere che rette corrispondenti nella (T) si intersecano sull'asse dell'omologia. Infatti, dal punto

$C(3,\ 0,\ 1)$ conduciamo la retta a che taglia l'asse y nelpunto di ordinata $y = 1$: la sua equazione è $x = 3 - 3y$.

$$
(4)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
3\rho = 3a_{11} + 0 + \cancel{a}_{13} & & \\
0 = 3\cancel{a}_{21} + 0 + \cancel{a}_{23} & * & \rightarrow (3,0,1) \\
\rho = 3a_{31} + 0 + a_{33} & & \\
& & \\
0 = 0 + \cancel{a}_{12} + \cancel{a}_{13} & \bullet & \\
m = 0 + a_{22} + a_{23} & & \rightarrow (0,1,1) \\
m = 0 + a_{32} + a_{33} & & \\
& & \\
0 = 0 - \cancel{a}_{12} + \cancel{a}_{13} & \bullet & \\
-n = 0 + a_{22} + a_{23} & & \rightarrow (0,-1,1) \\
n = 0 - a_{32} + a_{33} & & \\
& & \\
-3t/2 = -3a_{11} + 0 + \cancel{a}_{13} & & \\
0 = -3\cancel{a}_{21} + 0 + \cancel{a}_{23} & * & \rightarrow (-3;0;1) \\
t = -3a_{31} + 0 + a_{33} & . &
\end{array}
\right.
$$

Per trovare il punto d'intersezione B con l'ellisse Γ basta risolvere il sistema:

$$
(S)\quad \begin{cases} x = 3 - 3y \\ x^2 + 2y^2 = 9. \end{cases}
$$

Si trova

$$B\left(-\frac{21}{11};\frac{18}{11}\right).$$

Possiamo ora trovare l'equazione della retta r_{AB}. Si ha r_{AB}: $2y - 3x - 9 = 0$. Essa interseca l'asse u nel punto $L(0\ ;\ 9/2)$.

Troviamo ora il punto d'intersezione B' della retta $a \equiv CB$ con la circonferenza; basta risolvere il sistema

$$
(S_1)\quad \begin{cases} x = 3 - 3y \\ 0 = 2x^2 + 2y^2 - 3x - 9\ . \end{cases}
$$

Scartando la soluzione $y = 0$, corrispondente al punto C, si ottiene: $B'(-21/20\ ;\ 27/20)$.

Con semplici calcoli si trova che l'equazione della retta $r_{A'B'}$ è: $6x - 2y + 9 = 0$. Essa interseca l'asse y nel punto $L(0\ ;\ 9/2)$.

Risulta così dimostrato che le rette AB e $A'B'$ si incontrano in uno stesso punto L dell'asse dell'omologia e pertanto esse sono rette corrispondenti.

Punti corrispondenti nella (T) sono dati dalle coppie (A, A') e (B, B').

Facciamo ora vedere che *le due coniche* Γ *e* K *sono omologiche* e a tale scopo troviamo la trasformazione T^{-1}, inversa della (T). Subito si ricava:

$$
(5)\quad T^{-1}:\quad \begin{cases} x_1 = \rho x_1' \\ x_2 = \dfrac{2}{3}\rho x_2' \\ x_3 = \dfrac{1}{9}\rho x_1' + \dfrac{2}{3}\rho x_3'\ . \end{cases}
$$

Scriviamo preventivamente l'equazione dell'ellisse in coordinate omogenee:

(6) Γ: $x_1^2 + 2x_2^2 - 9x_3^2 = 0$.

Sostituiamo le (5) nella (6) e procediamo nei calcoli. Si ha di seguito:

- $\rho^2 x_1^2 + 2\dfrac{4}{9}\rho^2 x_2^2 - 9\rho^2\left(\dfrac{x_1'}{9} + \dfrac{2}{3}x_3'\right)^2 = 0$,
- $x_1'^2 + \dfrac{8}{9}x_2'^2 - 9\left(\dfrac{x_1'^2}{81} + \dfrac{4}{9}x_3'^2 + \dfrac{4}{27}x_1'x_3'\right) = 0$,
- $x_1'^2 + \dfrac{8}{9}x_2'^2 - \dfrac{x_1'^2}{9} - 4x_3'^2 - \dfrac{4}{3}x_1'x_3' = 0$
- $2x_1'^2 + 2x_2'^2 - 3x_1'x_3' - 9x_3'^2 = 0$,

Se passiamo a coordinate non omogenee ponendo $x_1'/x_3' = x', x_2'/x_3' = y'$, si ha :

(7) $2x'^2 + 2y'^2 - 3x' - 9 = 0$.

Come si vede, l'omologia trasforma l'ellisse Γ nella circonferenza K.

Seconda parte

Siano α e α' i piani sovrapposti su cui sono dati i due riferimenti distinti $Ox_1x_2x_3$ e $O'x_1'x_2'x_3'$. Riprendiamo la terza equazione della trasformazione T

(8) $\rho x_3' = -\dfrac{1}{6}x_1 + \dfrac{3}{2}x_3$

e poniamo $x'_3 = 0$; si ottiene l'equazione $x_1 - 9x_3 = 0$. Essa è la *seconda retta limite dell'omologia*, cioè è la retta del piano α che si trasforma nella retta impropria $x'_3 = 0$ del piano α'.

La teoria ci dice che una conica F del piano α tangente alla retta limite $x_1 - 9x_3 = 0$ si muta, tramite la trasformazione inversa T^{-1} della T, in una parabola. Infatti, prendiamo come conica F la circonferenza

(9) $(x - 6)^2 + y^2 = 3^2$

ossia, in coordinate omogenee,

(10) $x_1^2 + x_2^2 - 12x_1x_3 + 27x_3^2 = 0$,

e applichiamo la trasformazione T^{-1} di equazioni

(11) $x_1 = \rho x_1'$, $x_2 = \dfrac{2}{3}\rho x_2'$, $x_3 = \dfrac{1}{9}\rho x_1' + \dfrac{2}{3}\rho x_3'$.

Fatte le sostituzioni e le dovute semplificazioni, si trova la parabola

(12) $10x_2'^2 - 9x_1'x_3' + 27x_3'^2 = 0$,

ossia

(13) $10y'^2 - 9x' + 27 = 0$.

Tracciando la figura con i dati di questa seconda parte, si verifica facilmente l'esattezza del procedimento seguito .

Bibliografia (per la parte teorica): Castelnuovo G., *Geometria* Vol. I, C. Ed. Dante Alighieri, 1904 – pag . 456.

È capitato a "Serra Ovara"

(*di Luciano Corso*) È capitato a "Serra Ovara" (Ogliastra, Sardegna) il 10 agosto, tra cielo e mare, lontano dagli uomini e dalle luci artificiali, ho guardato il cielo di quella buia notte senza luna e mi sono fermato in ogni costellazione e ho cercato di vedere con la parte periferica della retina (più sensibile del resto) qualche novità celeste. Poi, sono andato alla nebula di Andromeda, tra Cassiopea e Perseo. Era visibile e la visione mi ha richiamato la storia dell'uomo, il suo rapporto con il cielo. Avrei potuto tentare di capire quella parte di me che mi sfugge, ma questo non l'ho fatto. Ho pensato invece a quanto sia poca cosa lo spazio della nostra vita rispetto ai 2.000.000 di anni luce che ci separano dalla nebula di Andromeda e alla vastità del cosmo. Si può essere sereni, trovare il coraggio di accettare i propri limiti? Auguriamocelo. Sia che io osservi il piccolo cardellino che si muove tra le siepi, sia che ascolti il "chiù, chiù" intermittente dell'assiolo che, sul leccio più alto, canta alla notte, sia che scruti Antares, la gigante rossa dello Scorpione, la mia emozione è sempre alta e i piccoli problemi di ogni giorno sembrano essere privi di rilievo. Ma la nube di pensieri che porto dentro e che si muovono caoticamente nella mia mente sono ben lungi dal darmi pace, serenità, accettazione dei miei limiti. Ho atteso una pioggia di meteore quella notte.