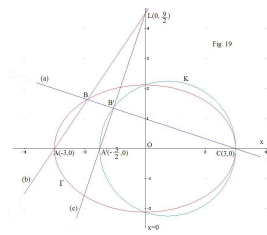


Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 154 – Pubblicato il 27 – 12 – 2010



Uno strumento matematico per le decisioni complesse

l'Analisi multicriteriale

Luca Cirillo^[1], Gabriella Marcarelli^[2] e Massimo Squillante^[3]

[Segue dal numero 153]

Una volta strutturato il problema decisionale, la fase successiva consiste nella raccolta dei dati mediante confronti a coppie al fine di determinare le priorità locali, che esprimono l'importanza relativa degli elementi appartenenti a ogni livello gerarchico considerato rispetto agli elementi del livello immediatamente superiore [13]. Poiché gli elementi di ogni livello devono essere confrontati tra loro è necessario che siano espressi nello stesso ordine di grandezza.

Per ogni coppia di elementi di un livello gerarchico il decisore esprime un giudizio di preferibilità, cioè stabilisce quale dei due elementi è più importante rispetto ad un criterio del livello immediatamente sovraordinato. Il risultato del confronto è quindi un coefficiente a_{ij} , detto coefficiente di dominanza, che rappresenta una stima della dominanza del primo elemento (i) rispetto al secondo (j) [18].

L'AHP sintetizza i risultati dei confronti tra criteri omogenei (ovvero appartenenti allo stesso livello gerarchico) in una matrice quadrata detta, appunto, dei confronti a coppie. Questa matrice gode delle seguenti proprietà:

- è positiva (non ha nessun elemento nullo): $a_{ij} > 0$
- vale 1 sulla diagonale principale: $a_{ij} = 1$
- è reciproca: $a_{ji} = 1 / a_{ij}$.

Per esprimere quantitativamente i giudizi, il decisore utilizza una scala di valutazione che indica l'intensità della relazione di preferenza che attribuisce ai due criteri confrontati. La scala semantica utilizzata da Saaty comprende i numeri naturali da 1 (uguale importanza fra i due criteri) a 9 (completa priorità di un criterio rispetto ad un altro) e i loro reciproci; i valori intermedi fra 1 e 9 indicano gradi progressivamente crescenti di importanza da 'debole' ad 'assoluta'.

Una volta costruita la matrice dei confronti a coppie occorre sintetizzare i rapporti di preferenza relativi a ciascuna alternativa x_i , cioè $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, in un'unica valutazione w_i rappresentativa di x_i in modo che, rispetto ad un criterio C_j :

$$w_i > w_j \Leftrightarrow x_i \succ x_j$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow w_1 \\ \rightarrow w_2 \\ \dots \\ \rightarrow w_n \end{matrix}$$

Figura 2. Matrice di confronto a coppie

Un vettore delle priorità w introduce un ordinamento su un insieme X di alternative, nel senso che se $w_i > w_j$ allora si presume che $x_i \succ x_j$. Le componenti del vettore delle priorità normalizzato, w^* (con $w_i^* = w_i / \sum_j w_j$), rappresentano le valutazioni delle corrispondenti alternative.

Per ottenere il vettore delle priorità relative, Saaty utilizza il metodo dell'autovettore destro. L'autovettore destro $w = w_{\lambda_{max}}$ è l'autovettore associato al più grande autovalore di A , cioè è soluzione dell'equazione: $A \cdot w = \lambda_{max} \cdot w$. Altri metodi per determinare il vettore dei pesi sono il metodo

della media geometrica [14], [8], che consente di ottenere un vettore le cui componenti sono medie geometriche degli elementi delle righe della matrice A

$$w_{gm} = \left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{1j}}, \dots, \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{nj}} \right)$$

e il metodo della media aritmetica, che genera un vettore le cui componenti sono medie aritmetiche degli elementi delle righe di A

$$w_{am} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{1j}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{nj} \right)$$

L'ultima fase del metodo AHP prevede la determinazione delle priorità globali che esprimono l'importanza delle alternative rispetto all'obiettivo globale della valutazione (*goal*). Per determinare l'importanza di ogni elemento rispetto al goal bisogna applicare il principio di composizione gerarchica (*Principle of Hierarchic Composition*): si realizza un modello a 'cascata' in cui, partendo dal livello gerarchico più alto, si moltiplicano le componenti del vettore delle priorità locali di ciascun elemento gerarchico per il peso del criterio dell'elemento 'genitore'.

L'ordinamento globale si ottiene mediante la somma pesata dei vettori delle priorità locali, o meglio eseguendo la somma pesata tra i punteggi attribuiti a ciascuna alternativa e i pesi attribuiti ai criteri e ai sottocriteri. I pesi globali degli elementi collocati alla base della gerarchia (alternativa) consentono di determinare un ordine di preferenza. Un'alternativa è preferibile ad un'altra se il suo peso globale è maggiore. La determinazione delle priorità è sempre accompagnata da una verifica di coerenza logica nell'attribuzione dei giudizi.

Le matrici dei confronti a coppie rappresentano uno strumento per ottenere le valutazioni quantitative delle alternative. A causa di errori, imprecisioni o semplicemente per mancanza di coerenza nei giudizi, la matrice dei confronti può non essere consistente. La mancata consistenza dipende sia dalla difficoltà che incontra il decisore nel mantenere la coerenza di giudizio in tutti i confronti a coppie, sia dal fatto che i giudizi possono essere strutturalmente non consistenti. Infatti, le relazioni di preferenza e di indifferenza che scaturiscono dai confronti a coppie possono essere non transitive, ad esempio se a_{fb} e b_{fc} può verificarsi che a_{pc} . La coerenza logica non si traduce solo nella validità della proprietà transitiva, ma esprime anche la logicità dei rapporti tra gli elementi (se $A=2B$ e $B=3C \Rightarrow A=6C$). L'incoerenza rappresenta, dunque, una violazione della proporzionalità tra gli elementi anche se viene rispettata la transitività. Per verificare la bontà dei giudizi espressi dal decisore sono state proposte diverse misure di consistenza [15], [12], [14]. Esiste un software applicativo del metodo AHP, Expert Choice, che non solo consente di determinare i vettori di priorità relative e globali ma consente di identificare le inconsistenze e di effettuare l'analisi di sensitività, ossia di verificare se e come varia l'ordinamento delle preferenze al variare dei pesi attribuiti ai singoli criteri.

6. Una generalizzazione dell'AHP: l'Analytic Network Process

Molti problemi decisionali non possono essere strutturati gerarchicamente perché comportano l'interazione e la dipendenza degli elementi dei livelli superiori dagli elementi dei li-

velli inferiori (*feedback*). Non solo, quindi, l'importanza dei criteri determina l'importanza delle alternative, come avviene in una gerarchia, ma anche l'importanza delle alternative determina l'importanza dei criteri.

L'*Analytic Network Process* (ANP) è la procedura impiegata per derivare le priorità in caso di dipendenza e *feedback* tra i vari livelli e all'interno degli stessi [10]. L'AHP, con le sue assunzioni di indipendenza degli elementi dei livelli superiori dagli elementi dei livelli inferiori (*outer independence*) e di indipendenza tra gli elementi di ogni singolo livello (*inner independence*), rappresenta un caso particolare dell'ANP. L'ANP utilizza una struttura reticolare per rappresentare il problema decisionale senza specificare i livelli, come avviene in una gerarchia, ma considerando dei clusters, cioè dei gruppi di elementi che presentano delle caratteristiche in comune.

7. Caso di studio: un'applicazione del metodo AHP all'analisi del progetto di una centrale elettrica

Il caso applicativo discusso in questo paragrafo prende spunto dallo studio d'impatto ambientale elaborato dalla Fiat Energia per la costruzione di una centrale elettrica a ciclo combinato [2]. L'analisi dei siti in cui localizzare le centrali del gruppo Fiat è partita da un numero molto ampio di alternative considerate sull'intero territorio nazionale, corrispondenti ad

altrettante aree di proprietà del gruppo stesso, aree nelle quali la realizzazione degli impianti riducesse l'impatto ambientale ed aumentasse i benefici e le sinergie con le infrastrutture presenti. Dopo una selezione iniziale, legata a ragioni di disponibilità societaria e incompatibilità di carattere ambientale, si è proceduto ad un'analisi più dettagliata di poche aree industriali. Il riscontro di una limitata disponibilità di spazio per alcune aree industriali ha comportato l'esclusione delle stesse dalla valutazione. Infine la scelta possibile è stata limitata a due soli siti alternativi nella regione Campania: Flumeri e Acerra.

I criteri di scelta considerati sono tre:

C1: presenza di infrastrutture;

C2: contesto sociale;

C3: contesto territoriale e ambientale.

La presenza di infrastrutture, elettrodotti e gasdotti a breve distanza consente un notevole risparmio sui costi dell'investimento, prevedendo solo i costi necessari all'adeguamento per l'esercizio della centrale.

Il contesto sociale rappresenta un elemento importante del progetto dal momento che tutte le proposte sono state messe a punto con la logica di una costante comunicazione con le comunità interessate, al fine di ottenere un inserimento del progetto nello specifico contesto il più possibile concertato e condiviso.

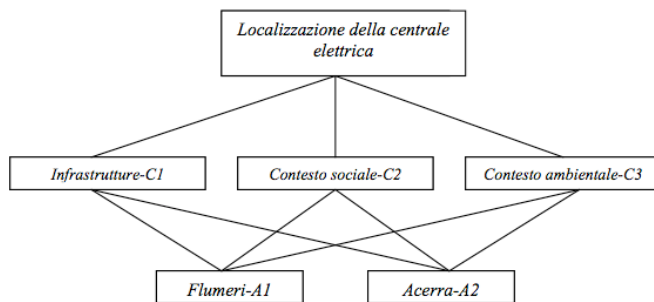


Figura 3. Struttura gerarchica per la localizzazione di una centrale elettrica

Infine, l'iniziativa proposta dalla Fiat punta alla maggiore efficienza tecnico-economica ma anche ambientale: l'identità dell'impianto e la scelta delle tecnologie sono in linea con le attuali politiche di sviluppo sostenibile.

La scelta tecnologica è stata, infatti, diretta verso una centrale a ciclo combinato perché utilizza il metano come fonte primaria a basso impatto ambientale e riutilizza il vapore per incrementare il rendimento. Inoltre, quando si parla di contesto ambientale, ci si riferisce anche alla possibilità di mitigare l'impatto

tramite la realizzazione di opere di insonorizzazione, lo studio architettonico dei fabbricati e la creazione di consistenti aree verdi.

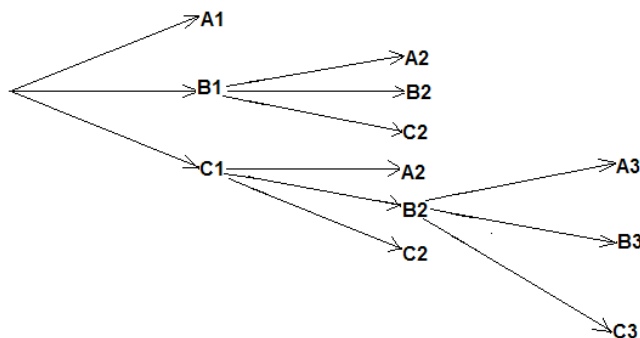
[Segue al numero 155]

[1], [2], [3] Università degli Studi del Sannio, Dipartimento di analisi dei sistemi economici e sociali: luca.cirillo@unisannio.it, gabriella.marcarelli@unisannio.it, massimo.squillante@unisannio.it

Prima il 12 o il doppio 7 ?

(di Luciano Corso) Questo problema è stato dato, insieme ad altri, in un test d'ingresso a una scuola universitaria di specializzazione. Ecco il testo: *Due ragazzi giocano a dadi e scommettono su quale combinazione di numeri uscirà per prima. Usano due dadi, ciascuno "numerato" da 1 a 6. Il primo ragazzo scommette che uscirà per prima la combinazione 12. Il secondo scommette che uscirà per due volte consecutive la combinazione 7. Continuano a giocare finché uno dei due vince. Qual è la probabilità che vinca il primo ragazzo?* Vengono proposte cinque soluzioni: a) 1/216, b) 1/36, c) 29/216, d) 7/13, e) 29/36. La soluzione corretta è la d. Provo io a giustificare la soluzione. Pongo $A = \text{"Esce il 12"}$, $B = \text{"Esce il 7"}$, $C = \text{"Ω-A-B"}$. Per cui: $P(A) = 1/36$, $P(B) = 6/36$, $P(C) = 29/36$. Pongo quindi $VA = \text{"Vince chi punta sul 12"}$, $VB = \text{"Vince chi punta sul doppio sette"}$, $VC = \text{"Il gioco continua"}$. Al pedice dei possibili eventi metto il numero del lancio: $B_2 = \text{"Esce B al secondo lancio"}$. Il grafo a lato descrive il problema. Studiando il grafo si ottiene la risposta corretta. Ecco la traccia: $P(VA) = P(A_1 \text{ o } (B_1 \text{ e } A_2) \text{ o } (C_1 \text{ e } A_2) \text{ o } (C_1 \text{ e } B_2 \text{ e } A_3)) = 455/7776$; $P(VB) = P((B_1 \text{ e } B_2) \text{ o } (C_1 \text{ e } B_2 \text{ e } B_3)) = 390/7776$; $P(VC) = 6931/$

7776. Dopo il terzo lancio il gioco si ripete. I rami C_1 , C_2 e C_3 riportano il gioco al punto di partenza. Se i giocatori vivono in



eterno e continuano a giocare, allora o VA o VB . Perciò, i casi favorevoli a VA sono 455 e i casi possibili sono $(455+390)=845$. Da cui $P(VA) = 455/845 = 7/13$. Scopro, infine, che posto $x = P(VA)$ si può arrivare allo stesso risultato impostando e risolvendo l'equazione $x = (1/36) + (29/36) \cdot x + (1/6) \cdot (29/36) \cdot x + (1/6) \cdot (1/36)$.