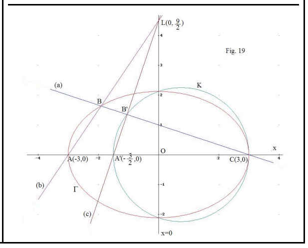
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 158 – Pubblicato il 02 – 05 – 2011



Matematica discreta da portare in classe

di Mauro Cerasoli [*]

1. Premessa

L'insegnamento della matematica è oggetto di discussione da tanti anni in tutte le sedi competenti: scuola, convegni, riviste, siti ecc. . La parola più usata nei dibattiti e nelle pubblicazioni o nei libri è "rinnovamento". Il problema mi fa ricordare una battuta su quei due cattolici che ripetevano spesso "vogliamoci bene" ma che poi venivano alle mani quando si trattava di stabilire cosa fosse il "bene". Lo stesso accade per il "rinnovamento dell'insegnamento (o della didattica) della matematica". Siamo tutti d'accordo su questo ma poi si litiga quando si va a discutere su "che rinnovamento fare" (ad esempio, l'uso delle tecnologie, ovvero dei computer e relativi software di matematica). Quasi tutti gli addetti ai lavori dicono che ormai è tempo di utilizzare queste tecnologie, che noi in Italia siamo indietro rispetto agli altri paesi più industrializzati, ma poi ci dividiamo quando si deve decidere come e quando, cioè come passare dalle parole ai fatti. Basti pensare che all'esame di stato del Liceo Scientifico è ancora vietato l'uso della calcolatrice programmabile. Il burocrate del MIUR forse non sa che ormai quasi tutto è già programmato e sta dentro al software stesso bello e pronto. Il programmare è un altro problema che interessa più gli informatici (cioè i matematici che si chiamano an-che informatici) che i matematici classici.

Un altro "bene" su cui si litiga sono i *contenuti*. La domanda numero uno è: che cosa insegnare ora che ci sono i computer? Vogliamo continuare solo con limiti, derivate e integrali oppure integrare il piatto con tutta quella matematica che non è mai insegnata e che poi si ritrova sui giornali? Ad esempio il sudoku o gli istogrammi? I giornali sono pieni d'istogrammi, ma molti studenti si diplomano (e molti si laureano in matematica) senza che nessuno abbia mai detto loro cosa sia un *istogramma*! Vanno al cinema, vedono cartoni animati con tanto di figure belle e misteriose, ma nessuno ha mai detto loro cosa è un frattale né cosa è un *numero random* necessario per programmare i video giochi.

Si è applaudito quando si sono rinnovati i programmi con l'introduzione della probabilità e della statistica. Purtroppo questo è avvenuto solo sulla carta, ma non nelle aule. Perché? La risposta è semplice e nota a pochi. Il burocrate del MPI prima e del MIUR dopo, indipendentemente da chi occupava Palazzo Chigi o la poltrona di Ministro, preparava due temi all'esame di stato: uno di matematica classica (studio di funzioni ecc), l'altro di probabilità e statistica, invitando il candidato a svolgerne solo uno. Il candidato, che non era fesso, sceglieva il primo tema perché il docente, durante l'anno aveva svolto solo quegli argomenti. Un anno, forse nel 2000, al Liceo Scientifico di Lanciano (CH) dove ero Presidente di Commissione, tutti e 72 i candidati scelsero il tema classico. La stessa cosa avveniva per il latino: da quando all'esame non si dava più la versione dal latino all'italiano, i docenti di latino si sono ben guardati dal far tradurre Cicerone, Orazio ecc. . E questo si chiama studiare latino? Per analogia, fare solo parabole, cerchi, limiti, derivate e integrali si chiama studiare matematica?

Se mi fossi azzardato a chiedere a un candidato cosa è un numero primo, rischiavo di essere denunciato per "*aver messo in difficoltà il candidato con domande non pertinenti al programma svolto*".

Anni fa una collega di Meta di Sorrento mi diceva che lei collaborava con un professore dell'Università di Napoli e che facevano ricerca in didattica della matematica. Su che argomenti chiesi io. Sulle geometrie non euclidee, rispose lei. Quali? Replicai. Mi guardò in modo strano e sicuramente stava pensando: ma non può essere che Mauro non conosca le geometrie non euclidee se mi chiede: quali? Così imbarazzata rispose: quelle ben note di Lobachewski e di Riemann. Al che aggiunsi: e le altre non le studiate? Quali altre? - rispose. Non ce ne sono di altre, in quanto l'assioma delle parallele lo puoi cambiare solo dicendo che non ce ne passa nessuna o che ce ne passano infinite, di rette parallele. E allora calai il mio asso di briscola dicendole: queste sono quelle che negano l'assioma n° 5 sulle rette parallele. Poi ci sono le altre, quelle che negano l'assioma seguente: *una retta ha infiniti punti*. Si chiamano *geometrie finite* e a Napoli ci sono ottimi ricercatori a livello mondiale in questo settore. Sarebbe molto bello se tu in classe, invece di mettere in crisi gli studenti con l'infinito (un concetto che assomiglia a un serpente a sonagli o a un cobra) che andrebbe presentato il più tardi possibile, vista la sua difficoltà, facessi conoscere…

2. Il piano di Fano

… così, nell'ambito del *problem solving*, faresti risolvere questo problema:

Sette pompieri (o infermieri, poliziotti, medici, carabinieri, ecc,) costituiscono la caserma dei vigili del fuoco di una città. Devono fare i turni di notte per ogni settimana con le seguenti regole.

a) *Ogni notte devono essere presenti tre pompieri*

b) *Ogni pompiere deve fare tre turni.*

Ora la soluzione non richiede l'uso di derivate (qui non ci sono spazio e tempo, anche se si parla di settimana e di caserma) ma il *grafo di Fano* risolve il problema.

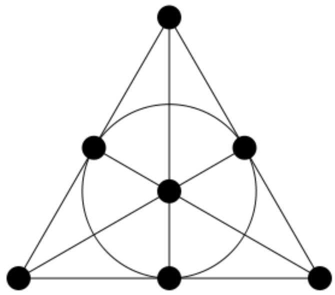


Fig. 1

I sette nodi (*punti*) che possiamo indicare 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 corrispondono ai pompieri. Le sette terne di nodi allineati o sul cerchietto (dette *rette*)

{1,2,4}, {2,3,5}, {3,4,6}, {4,5,7}, {5,6,1}, {6,7,2}, {7,1,3}

costituiscono i turni di guardia settimanali. L'insieme dei sette punti con l'insieme delle sette rette costituisce il *piano di Fano*. Esso è un esempio di Geometria Finita, ovvero di uno spazio geometrico finito (*piano proiettivo*) con le seguenti proprietà (assiomi):

- per ogni punto del piano passano tre rette
- per ogni coppia di punti passa una e una sola retta
- ogni coppia di rette si incontra in uno e un solo punto
- data una retta e un punto esterno ad essa, non esiste retta passante per il punto e parallela (con intersezione vuota) alla retta data.

Qualcuno potrebbe dire, non facciamo solo limiti e derivate ma anche calcolo combinatorio. Va bene, ma un calcolo combinatorio monco! Il triangolo di Tartaglia è stato mai illustrato con le figure seguenti?

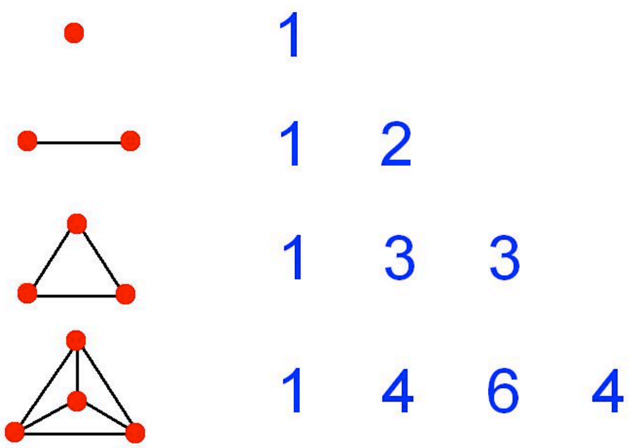


Fig. 2

dove per

- n = 0, Punto: hai un punto,
- n = 1, Segmento: hai una parte interna e due punti estremi,
- n = 2, Triangolo: hai tre vertici, tre lati e una superficie; 1, 3 e 3,
- n = 3, Tetraedro: ha 4 vertici, 6 spigoli, 4 facce e una parte solida.

E poi, per n = 4? Quando si studia il triangolo di Tartaglia chi ha mai fatto queste figure?

3. Quadrati latini e grafi

Un altro problema che si presenta in agricoltura è il seguente: abbiamo quattro varietà di grano e quattro tipi di terreno. Come organizzare una semina economica per saggiare contemporaneamente tutti i tipi di grano e di terreno?

Se indichiamo con *a, b, c, d* le varietà di grano, una soluzione è il seguente *quadrato latino*

a	*b*	*c*	*d*
b	*c*	*d*	*a*
c	*d*	*a*	*b*
d	*a*	*b*	*c*

Ma dove sono i teoremi? La matematica è fatta di teoremi! E allora facciamo questa domanda: qual è il teorema più *semplice*?

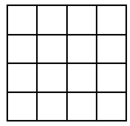
In matematica la parola «semplice», anche se spesso usata, non è mai stata ben definita. Allora aggiungiamo: qual è il teorema che si può introdurre per primo nella scuola, per esempio alle elementari o all'asilo? Certo non quello di Pitagora. Io propongo il seguente, preso dalla *teoria dei grafi*:

Un albero di n nodi ha n – 1 lati.

Intanto si faccia avanti chi vuol fornire una semplice dimostrazione dopo aver definito rigorosamente cosa è un *albero*. Spesso si parla di *diagramma ad albero* senza aver mai definito il concetto matematico di albero. Il teorema non è per nulla interessante, né curioso e sembra piuttosto banale, anche se non del tutto evidente. E allora una seconda domanda: qual è il teorema più semplice che ha pure qualche altra proprietà come l'eleganza e la meraviglia? Risposta mia:

In un grafo planare vale la formula di Eulero
nodi – lati + facce = 1.

Nel grafo estratto dal quadrato latino di sopra



ci sono 25 nodi, 40 lati e 16 facce ed infatti:

25 - 40 + 16 = 1

Ma queste sono cose troppo semplici, valgono per le elementari o per le scuole medie. Cosa si può fare alle superiori?

4. La funzione aritmetica di Eulero

Ad esempio si potrebbe parlare della *formula delle collane*. Se hai m tipi di perle e vuoi farci una collana utilizzandone n, quante collane differenti puoi fare? Per m = 2 (le perle sono a = rosso e b = blu) ed n = 4 ci sono solo 6 modelli di collane:

aaaa, aaab, aabb, abab, abbb, bbbb

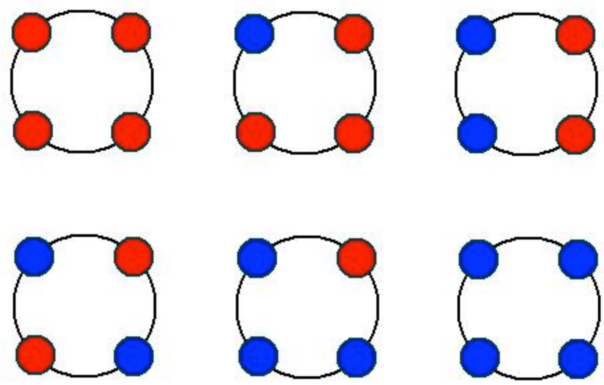


Fig. 3

Ovviamente le *permutazioni circolari con ripetizione* di sopra corrispondono alle collane quando la prima perla si unisce all'ultima per fare la collana. E in generale? Il numero di collane è dato dalla formula

$$(1/n)\sum_{d|n} \varphi(d) m^{n/d}$$

dove la somma si intende estesa a tutti i divisori di n e $\varphi(d)$ è la *funzione aritmetica di Eulero* che conta il numero di numeri minori di d e primi con d.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Qualcuno potrebbe dire: e la dimostrazione? La risposta è: e la dimostrazione che l'area della sfera e $4 \cdot \pi \cdot r^2$? O che il volume della sfera è $(4/3) \cdot \pi \cdot r^3$? Quando mai vengono svolte? E poi chi l'ha detto che bisogna dimostrare tutto? Con quella formula lo studente viene a sapere che ci sono anche le *funzioni aritmetiche* oltre a seno, coseno, logaritmo, ecc., cioè le funzioni che sono nate prime di queste.

Se venissero introdotte prima le funzioni discrete, si capirebbero meglio tante proprietà delle funzioni di variabile reale e dei loro integrali. L'esempio classico è che la funzione aritmetica $n!$ ha dato ad Eulero lo spunto per introdurre la sua *funzione gamma*. Infatti $\Gamma(x)$ è un fattoriale quando x è un numero naturale. [*Segue al numero 159*]

[*] Università della Basilicata - *maurocerasoli@gmail.com*