ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari,– Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 159 – Pubblicato in data 01 – 06 – 2011

Matematica discreta da portare in classe

di Mauro Cerasoli [*]

[*Segue dal numero 158*]

5. La misteriosa formula di Pick

Una formula della matematica, poco nota, è quella di Pick del 1899. Consideriamo il quaderno a quadretti, ovvero quello che le maestre chiamano il *geopiano*. In altri termini, consideriamo i nodi del quaderno, cioè le intersezioni delle rette. Fissati alcuni nodi, possiamo considerare il poligono racchiuso da loro, come nella fig. 4.

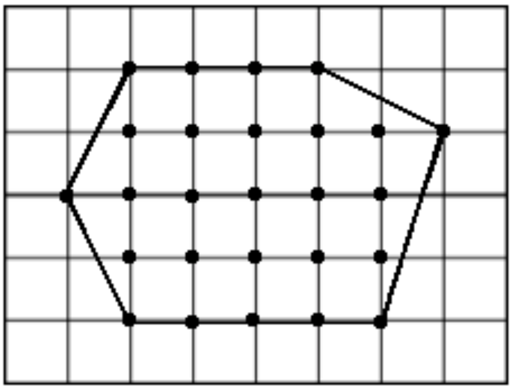


Fig. 4

La formula di Pick ci dà l'area di un tale poligono quando l'unità di misura è la distanza tra le rette. Basta conoscere:

a) il numero i di nodi interni al poligono (15 nella figura),
b) il numero b di nodi che si trovano sui lati che formano il poligono, cioè che stanno sul bordo del poligono (11 nella figura).

Allora l'area del poligono vale

$$i - 1 + b/2$$

(15 – 1 + 11/2 = 39/2 nel nostro caso).
Sarebbe interessante conoscere una dimostrazione elementare di questa formula.

6. Le proprietà del numero 153

Si legge nel Vangelo secondo Giovanni che Simon Pietro tirò a riva la barca con la rete colma di ben 153 pesci. Perché 153 e non 150 o 155? Forse arcani misteri si nascondono dietro il 153? Quali? In verità questo numero ha qualcosa di magico. Intanto soddisfa alcune proprietà aritmetiche di fronte alle quali solo i minerali più grezzi restano indifferenti:

$$1+2+3+4+ \dots +16+17 = 153$$
$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$
$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153.$$

Ci sono soltanto altri tre numeri, oltre a 1 e 153, che sono uguali alla somma dei cubi delle loro cifre: 370, 371 e 407. Queste curiose proprietà appartengono a 153 dalla notte dei tempi e potrebbero dare della matematica quell'idea, sbagliata, che sia una disciplina che tratta cose vecchie quanto il mondo. E che dire allora di questa altra meravigliosa proprietà del numero 153 scoperta dal matematico israeliano Phil Kohn nel 1961?

Prendete un qualsiasi numero multiplo di tre, sommate i cubi delle sue cifre, poi sommate i cubi delle cifre del risultato ottenuto e così via. Riuscite a indovinare cosa apparirà alla fine? Facciamo una prova col numero 162:

$1^3 + 6^3 + 2^3 = 225$;
$2^3 + 2^3 + 5^3 = 141$;
$1^3 + 4^3 + 1^3 = 66$;
$6^3 + 6^3 = 432$;
$4^3 + 3^3 + 2^3 = 99$;
$9^3 + 9^3 = 1458$;
$1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 702$;
$7^3 + 2^3 = 351$
et voilà
$3^3 + 5^3 + 1^3 = 153$.

Ora, ripetendo l'algoritmo, avremo sempre il numero 153 di Simon Pietro (o dell'evangelista Giovanni). Il 1961 non è un anno tanto lontano; ci si lamenta spesso che la Storia insegnata nelle nostre scuole si ferma troppo presto e che non tratta gli avvenimenti della seconda metà del secolo scorso. Almeno parla della prima guerra mondiale! E la Matematica? Di che secolo è l'argomento più giovane di matematica studiato dai nostri ragazzi? In certe scuole non ci si ferma che alla fine del '600!

7. Il problema del collezionista

Le somme parziali della serie armonica hanno un'interessante proprietà probabilistica. Servono per risolvere i seguenti problemi: quante figurine bisogna raccogliere per riempire un album di n caselle? Quanti figli bisogna fare per avere un maschietto e una femminuccia? Quanti lanci sono necessari per vedere uscire tutte le facce di un dado? Quanti lanci sono necessari per vedere uscire tutte le facce di un n-dado (un dado con n facce)? Si può dimostrare che il numero medio di figurine da acquistare per riempire l'album, quando non è possibile fare scambi di figurine doppioni, e tutte sono distribuite a caso nelle bustine, è

$$n\cdot(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n)$$

La tabella seguente fornisce alcuni valori fino a 6.

Variabile aleatoria	media
2 Moneta	2(1+1/2) = 3
3 Trottola	3(1+1/2+1/3) = 5,5
4 Piramide	4(1+1/2+1/3+1/4) = $8,\underline{3}$
5 Pentagono	5(1+1/2+1/3+1/4+1/5) = $11,41\underline{6}$
6 Dado	6(1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6) = $14,\underline{7}$

Chi avrebbe mai detto che il *cubo* oltre a tutte le sue costanti geometriche (numero di vertici, spigoli, facce, area totale, volume ecc.) ha la costante 14,7?

8. Il quadrato magico apocalittico

Se qualcuno mi avesse proposto di costruire un *quadrato magico* 6 × 6 con le seguenti proprietà:

1. la somma degli elementi di ciascuna riga è 666 (costante

magica o diabolica)
2. la somma degli elementi di ciascuna colonna è 666
3. la somma degli elementi di ciascuna delle due diagonali è 666
4. la somma degli elementi di ciascuna sottodiagonale con la parte sopra la diagonale è 666

			j	e	r
m				k	f
a	n				l
g	b	o			
	h	c	p		
		i	d	q	

m + n + o + p + q + r = 666 (in rosso)
a + b + c + d + e + f = 666 (in azzurro)
g + h + i + j + k + l = 666 (in nero)

5. i suoi elementi sono numeri primi,

avrei risposto serenamente che il problema non aveva soluzione. Perché l'insieme dei numeri primi minori di 666 è

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, …, 659, 661}

abbastanza piccolino per trovare tra loro 36 numeri così da risolvere il problema! E mi sarei sbagliato! Miracolosamente … il problema ha soluzione! È il

Quadrato magico apocalittico

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

[*] Università della Basilicata - *maurocerasoli@gmail.com*

Enunciato del teorema di Désargues-Sturm: un'applicazione

di Nazario Magnarelli

Le coniche di un fascio segano sopra una retta r, non passante per alcuno dei suoi punti base, le coppie di punti coniugati in una stessa involuzione (L. Campedelli: Lezioni di Geometria, Vol. 1°, pag. 268, C. Ed. CEDAM, Padova, 1970). Illustriamo il teorema con un esercizio.

Dato un riferimento cartesiano Oxy, si consideri la parabola K di equazione $y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ e si scriva l'equazione del fascio di coniche osculatrici la K nel punto $P(0, 2)$ e passanti per il punto $M(1, -1)$. Si determini poi l'equazione dell'involuzione che si ottiene intersecando le coniche di detto fascio con una retta non passante per alcuno dei suoi punti base.

Soluzione: Per scrivere l'equazione del fascio di coniche osculatrici debbo trovare anzitutto la tangente alla parabola nel punto $P(0, 2)$. La formula della tangente è:

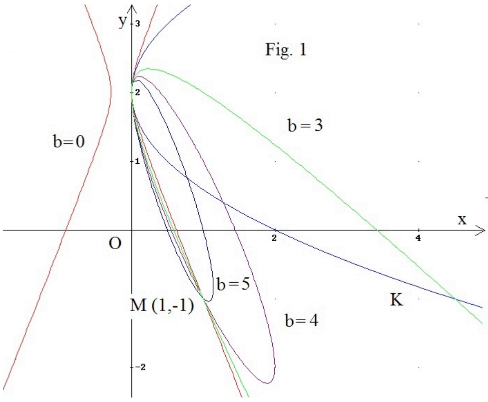
$(f_x)_P(x - x_0) + (f_y)_P(y - y_0) = 0,$ (1)

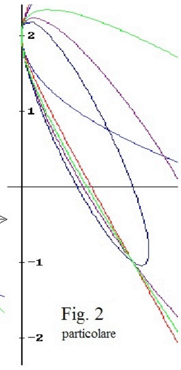
ove $f(x, y) = y^2 - 2x - 4y + 4$, e $f_x = -2$, $f_x(P) = -2$, $f_y = 2y - 4$, $f_y(P) = 0$. La tangente è $-2(x - 0) + 0 = 0, \quad x = 0.$ (2)

Tra le coniche che osculano la parabola nel punto $P(0, 2)$ ci sono le coniche degeneri spezzate nella tangente $x = 0$ e nelle rette per P $[a(x - 0) + b(y - 2) = 0]$.

L'equazione del fascio di ∞^2 coniche che osculano la K nel punto P è quindi: $y^2 - 2x - 4y + 4 + x(ax + by - 2b) = 0.$ (3)

Poiché la generica conica osculatrice passa per il punto $M(1, -1)$ si avrà la condizione : $1 - 2 + 4 + 4 + 1(a - b - 2b) = 0,$





In fig. 1 sono disegnate, con diversi colori, le coniche del fascio (5); esse corrispondono ai valori 0, 3, 4, 5 del parametro b. I due punti di intersezione di una conica di un dato colore con l'asse x ci danno una coppia di punti coniugati nella involuzione. Si possono così osservare quattro coppie di tali punti .

cioè $a = 3b - 7;$ (4)

pertanto il fascio di coniche osculatrici assumerà l'equazione $y^2 - 2x - 4y + 4 + x[(3b - 7)x + by - 2b] = 0$, ossia

$(3b - 7)x^2 + bxy + y^2 - (2b + 2)x - 4y + 4 = 0.$ (5)

Al variare di b si ottiene così un fascio di ∞^1 coniche (fig. 1).

Se intersechiamo il fascio con l'asse x $(y = 0)$, che non passa per alcuno dei suoi punti base, per il teorema di Désargues-Sturm si ottengono le coppie di punti coniugati in un'involuzione. Si tratta di una particolare trasformazione della retta in sé la cui equazione generale ha forma

$\alpha\, x x' + \beta\,(x + x') + \delta = 0$, con $\beta^2 - \alpha\,\delta \neq 0$.

Le ascisse dei punti di una coppia sono date dalle radici dell'equazione: $(3b - 7)x^2 - (2b + 2)x + 4 = 0.$ (6)

Più che le singole ascisse di una coppia di punti coniugati nell'involuzione, a noi interessa conoscere il loro prodotto e la loro somma.

Per $b = 1$, dalla (6) si ha $-4x^2 - 4x + 4 = 0$ o $x^2 + x - 1 = 0$.

Regola di Cartesio: $x_1 \cdot x_1' = -1,\ x_1 + x_1' = -1.$ (7)

Per $b = 2$, dalla (6) si ha $-x^2 - 6x + 4 = 0$ o $x^2 + 6x - 4 = 0$.

Regola di Cartesio: $x_2 \cdot x_2' = -4,\ x_2 + x_2' = -6.$ (8)

Queste due coppie di punti coniugati ci permettono di trovare l'equazione dell'involuzione, per mezzo di una formula, che scriviamo nel caso generale e in questo caso particolare:

$$\begin{vmatrix} x \cdot x' & x + x' & 1 \\ x_1 \cdot x_1' & x_1 + x_1' & 1 \\ x_2 \cdot x_2' & x_2 + x_2' & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} x \cdot x' & x + x' & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Sviluppando il determinante si ha l'equazione dell'involuzione:

$-x \cdot x' - 4(x + x') + 6 - 4 + 6x \cdot x' + (x + x') = 0$, ossia

T: $5x \cdot x' - 3(x + x') + 2 = 0.$ (10)

Torniamo all'equazione (6), che ci dà le ascisse di una coppia di punti coniugati per qualsiasi valore del parametro b; e facciamo vedere che se diamo alla variabile b un valore diverso dai primi due, o da uno di essi, otteniamo la stessa involuzione. Infatti, per $b = 3$ dalla (6) si ha:

$x^2 - 4x + 2 = 0$, e $x_3 \cdot x_3' = 2,\ x_3 + x_3' = 4,$ (*)

e la (9) fornisce l'equazione

$$\begin{vmatrix} x \cdot x' & x + x' & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \quad 5xx' - 3(x + x') + 2 = 0.$$

Sviluppando il determinante si trova che l'equazione dell'involuzione è ancora la (10). Ponendo $x = x'$ si trova che i suoi punti doppi non sono reali, quindi la trasformazione è ellittica: infatti il suo modulo è $\beta^2 - \alpha\delta = 9 - 10 < 0$. Abbiamo così verificato il teorema di Désargues-Sturm con uno specifico esempio.

Bibliografia: Profenna G., *Esercizi riepilogativi d'esame di Geometria Analitica*, II parte, pag. 69, Edizioni P.O.T.E.S, Roma, anni '60