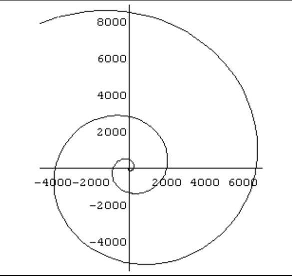
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – lcorso@itisgmarconi.vr.it - Numero 16 – aprile 1999



Le espressioni matematiche celebri che hanno cambiato il modo di pensare

di Luigi Marigo

[Segue dal n. 15] La definizione assiomatica di entropia, data da Clausius, è questa:

$$S_A = S_O + \int_O^A \frac{dQ}{T} \qquad ; \qquad \Delta S = \int_O^A \frac{dQ}{T} \tag{8}$$

ove l'integrale è calcolato lungo una trasformazione reversibile e O è uno stato di riferimento alla cui entropia è assegnato il valore S_O. Tale definizione è astratta e vuota di rappresentazioni modellistiche, e nella seconda metà del secolo XIX fu sentita l'esigenza di correlarla a specifiche proprietà della materia. Ludwig Boltzmann nel 1872 propose la sua celebre definizione:

$$S_A = S_o + k \cdot ln P_A \tag{9}$$

ove $S_O = k \cdot ln\ P_O$; $\Delta S = k \cdot ln\ (P_A/P_O)$; $k \cong 1.38 \cdot 10^{-23}$ j/°K.

P_A è la cosiddetta probabilità termodinamica dello stato A, intesa come numero di stati microscopici corrispondenti allo stato macroscopico A. S_O è interpretato come entropia di uno stato di riferimento.

La grande portata epistemologica della definizione di Ludwig Boltzmann sta nel fatto che il conteggio degli stati microscopici si fonda sulla reale esistenza di atomi e molecole, considerati fino ad allora solo come modelli utili a spiegare le reazioni chimiche. La tesi di Boltzmann fu violentemente contestata, soprattutto da Mach e Ostwald, ma alla fine prevalse: la reale esistenza di atomi e molecole fu accettata. È ovvio che se il conteggio dei microstati è corretto, l'entropia di Boltzmann coincide con quella macroscopica di Clausius.

Entropia media di una trasformazione

di Luciano Corso

In teoria dell'informazione, sulla base delle elaborazioni concettuali dovute a Claude Shannon, l'entropia associata ad un sistema di informazioni è data da

$$S = (1/\ln 2) \cdot \ln W, \tag{10}$$

ove W è il numero degli stati possibili in cui si può trovare il sistema e S (entropia) è il numero minimo di domande a risposta dicotomica che si devono fare per venire a conoscenza dello stato reale in cui si trova il sistema. Nell'ipotesi di un sistema costituito dall'unione di n microsistemi chiusi e in contatto è possibile misurare l'entropia media del sistema mediante la seguente relazione:

$$M(S) = \frac{1}{Ln(2)} \cdot \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \cdot Ln\left(\frac{1}{P(E_i)}\right) \tag{11}$$

ove E_i rappresenta lo stato dell'i-esimo microsistema (configurabile come evento possibile).

Il concetto di entropia può essere applicato a numerosi campi del sapere. Ecco una sua applicazione in economia: supponiamo che per la realizzazione di un certo prodotto siano necessari n=5 fattori produttivi i cui contributi di partecipazione, in termini di quantità, siano uguali a $x_1=80u$, $x_2=30u$, $x_3=40u$, $x_4=35u$, $x_5=15u$, ove le unità elementari dei diversi fattori sono state convertite in unità standard (*u*) – che possono essere unità monetarie, unità biologiche, unità energetiche o altro. Dopo la produzione, le W =200u risultano parti indistinte che concorrono tutte all'utilità del bene prodotto. La produzione di quel bene è costata, in termini di entropia, la differenza di entropia riscontrabile nel passaggio tra il prima e il dopo la realizzazione del prodotto. Calcoliamo tale costo applicando le (10) e le (11):
Per calcolare l'entropia associata al sistema di fattori produttivi prima della trasformazione, basta applicare la (11) tenendo conto che $P(E_i)=x_i/W$; nel nostro caso otteniamo:

$$M(S_i) = \frac{1}{Ln 2} \cdot \left[\frac{80}{200} \cdot Ln\frac{200}{80} + \ldots + \frac{15}{200} \cdot Ln\frac{200}{15}\right] = 2{,}12402 \text{ bit}$$

Dopo aver realizzato il prodotto l'entropia del sistema risulta essere uguale a:

$$S = \cdot (Ln 200) / (Ln 2) = 7{,}64386 \text{ bit}$$

Il costo della trasformazione per la realizzazione di quel bene risulta quindi di:

$$|S - M(S_i)| = |7{,}64386 - 2{,}12402| = 5{,}51984 \text{ bit}$$

È strano pensare che un prodotto realizzato per il soddisfacimento di un bisogno umano abbia comportato un aumento di entropia nel sistema, ma è così.. Se si interpreta la quantità di entropia occorsa per la trasformazione come misura del valore di un bene nato da un processo organizzato di produzione, allora essa deve avere segno opposto (sintropia) ed è risvolto complementare del disordine provocato nel sistema per effetto della produzione.

Bibliografia: Peter W. Atkins, «Il secondo principio», Ed. Zanichelli, 1988, Bologna; Frederick Reif ed altri; «La teoria dell'informazione» Ed. EST Mondadori, 1975, Milano; Luciano Corso, «Entropia come misura», La voce verde n. 11 – anno III, nov.- dic. 1992, pagg. 9 - 15, Verona

Una "equazione diofantina" particolare

di Arnaldo Vicentini

Un giorno sento da mia figlia che la *profe* di filosofia ha assegnato agli allievi una ricerca sulla *Dialettica*. Mi metto a cercare «Dialectic» sulla «*Britannica» e*… mi imbatto nella voce «*Diophantine equations*». Alla quinta riga si legge:" *For example, the problem of finding the whole numbers x and y satisfying x^2-y^3=30 is a Diophantine problem, and this equation is Diophantine*". Interrompo la lettura per chiedermi se tale equazione è solubile in **N** e come in generale si discute in **N** l'equazione

$$x^2 - y^3 = k \tag{1}$$

per dato k intero.

La questione mi risulta subito difficile! Ragioniamo! Per k= 0 le soluzioni della (1) sono infinite poiché:

$$\forall n \in Z,\ [x=n^3 \wedge y=n^2] \Rightarrow [x^2-y^3=0]\ . \tag{2}$$

E per $k \neq 0$? L'intervallo tra quadrati consecutivi cresce circa come il doppio della base; quello tra cubi circa come il triplo del quadrato della base; ossia, quadrati e cubi son sempre più rari. Perciò, al crescere di y, la probabilità che un cubo disti da un quadrato non più di k è sempre più scarsa. Congetturo così che per dato $k \neq 0$ la (1) abbia in N un numero finito di soluzioni, magari nullo. Ricorro allora al computer e scopro presto che x^2-y^3=30 è risolta da (x,y)=(83,19). Perfeziono quindi il programma facendogli cercare le coppie (x,y) di interi (per y da 1 in su) che risolvono la (1) per $0 < k \leq 30$; e lo lascio girare per ore. Ho anche implementato una struttura capace di rappresentare interi con più di 100 cifre. Il computer sembra darmi ragione! Y ha già raggiunto dieci milioni, ossia x2 ha superato 1021, e ci sono solo 18 coppie di interi positivi che soddisfano la (1) per 0 < k ≤ 30, (e una sola – la n° 11 – per k=30). Eccole:

Tabella A Soluzioni in **N** dell'equazione (1) per 0 < k ≤ 30.							
n°	x	y	k	n°	x	y	k
1	2	1	3	10	47	13	12
2	3	2	1	11	83	19	30
3	6	3	9	12	253	40	9
4	9	4	17	13	282	43	17
5	12	5	19	14	312	45	8
6	15	6	19	15	375	52	17
7	19	7	18	16	1138	109	15
8	23	8	17	17	378661	5234	17
9	32	10	24	18	736844	8158	24

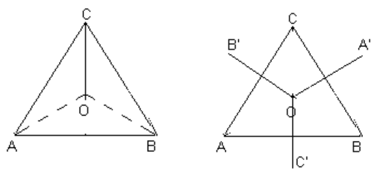
Nella tabella A ci sono ben 5 soluzioni distinte per k=17, mentre non ce n'è alcuna per k=2 e ce n'è una sola per k=1. Ma gli interi sono infiniti! Occorrerebbe provare la congettura, ossia dimostrare che per ogni k≠0 esiste un intero positivo n (dipendente da k) tale che se è y>n la (1) è impossibile in N.

Cari lettori… la questione resta aperta! Ci ho pensato per una settimana senza sostanziali progressi. Qualcuno è in grado di insegnarmi come trattare siffatte equazioni ?

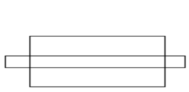
La completezza crea «oggetti»

di Luigi Marigo

In un mondo in cui siano conosciuti solo segmenti, rette e poligoni e pertanto sia sconosciuto il cerchio, un appassionato si dedica a questa costruzione: considera il triangolo equilatero



ABC, con $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$,
traccia gli assi dei lati e determina i punti A', B', C' tali che
$\overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'} = 1$:
il poligono $AB'CA'BC'$ è un esagono regolare. Ripete l'operazione sui lati dell'esagono e di seguito indefinitamente, individuando una successione di poligoni regolari P_n *(n=0, 1, 2, …)* con numero di lati $N=3\cdot 2^n$, tale che $P_n \subset P_{n+1}$ $\forall n$. Detto Φ un punto tale che $\Phi \in P_n$ $\forall n$, è
$\overline{O\Phi} \le 1$,
per cui esisterà un poligono *A* che include i P_n $\forall n$.
Da $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots \subset A$ segue, per le aree a(.), $a(P_0)<a(P_1)< \ldots <a(P_n)< \ldots <a(A)$ ∀n. La proposizione non è invertibile: una figura può avere area minore di un'altra, ma non essere inclusa in essa:



Essendo *a(A)=magg.{a(P_n)}*, *{a(P_n)}* è limitato superiormente e per l'assioma di completezza esiste *c=Sup{a(P_n)}*. Per i principi di equivalenza esistono infinite figure di area *c*, ma se tra queste si cerca quella minima C tale che $P_n \subset C$, $\forall n$, si individua un luogo di punti Φ tali che
$\overline{O\Phi} \le 1 \quad \forall \Phi$,
vale a dire il cerchio di centro *O* e raggio *1*. Si lascia al lettore la dimostrazione (o quanto meno una congettura) di questa conclusione.

In testi e manuali compaiono considerazioni similari, ma l'idea di cerchio è data a priori e la procedura esaustiva è intesa ad assegnargli un'area. Qui si mette in evidenza come la completezza abbia creato non solo l'area del cerchio, ma il cerchio stesso.

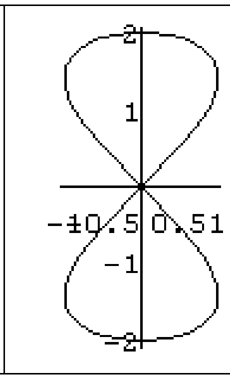
La lemniscata di Gerono

Il nome deriva dal latino *lemniscatus*, che nell'antica Roma era un nastro annodato pendente dalle corone trionfali. La curva è stata scoperta da Gregorio di S. Vincenzo. Le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = a \cdot \sin t \cdot \cos 2 \cdot t \\ y = a \cdot \cos t \end{cases}$$

con {0 ≤ t ≤ 2·π}.

Bibliografia: Luciano Cresci, «Le curve celebri», Muzzio ed., Padova, 1998



Un integrale ellittico curioso

di Arnaldo Vicentini

È più lunga la semicirconferenza dell'ellisse di Fig. 1 (a=√2; b=c=1; e=c/a=√2/2; equazione canonica: x2/2+y2=1), o la

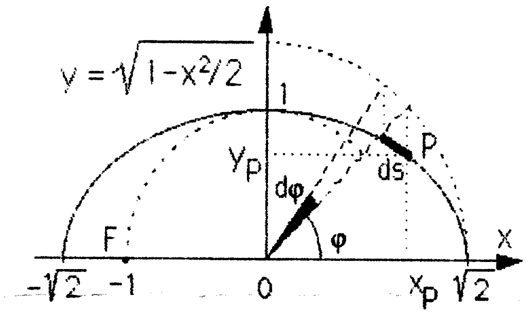


Fig. 1

semisinusoide di Fig. 2 ?

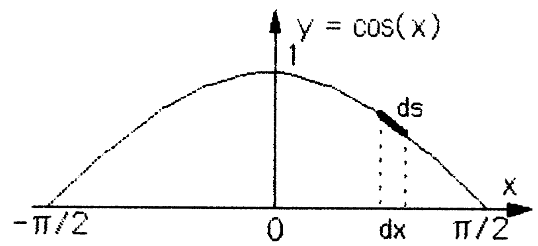


Fig. 2

L'arco d'ellisse di Fig. 1 ha la corda un po' più corta di quella dell'arco di sinusoide di Fig. 2, (2√2=2,82842…< 3,14159… = π); ma l'arco di sinusoide è più teso del primo. Chissà! Proviamo a calcolare queste lunghezze. Messa l'ellisse in equazioni parametriche:

{x = √2·cos(φ) ; y = sin(φ)}, (1)

l'arco elementare dell'ellisse risulta lungo:

$ds_e = [dx^2+dy^2]^{1/2} = [2 \sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)]^{1/2}\, d\varphi = [2-\cos^2(\varphi)]^{1/2}\, d\varphi$.

La semicirconferenza della nostra ellisse è:

$$s_e = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[1 - \cos^2(\varphi)/2\right]^{1/2} d\varphi \,. \tag{2}$$

Si tratta, come è noto, d'un integrale ellittico di 2ª specie (valutabile integrando per serie). L'arco elementare della sinusoide è lungo:

$ds_s = [1+(dy/dx)^2]^{1/2}\, dx = [1+\sin^2(x)]^{1/2}\, dx = [2-\cos^2(x)]^{1/2}\, dx$;

e la lunghezza della nostra semisinusoide è:

$$s_s = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[1 - \cos^2(x)/2\right]^{1/2} dx \,. \tag{3}$$

O meraviglia! Ci siamo accinti a calcolare le due lunghezze per sapere chi fosse maggiore e siamo giunti a stabilire che sono uguali, senza venir a conoscere quanto sono di fatto.