

Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Giovanna Tessari, Carlo Marchiori, – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 163 – pubblicato il 3 – novembre – 2011

Misura di un angolo compreso fra due rette

di Giovanni Ciammaruoni^[1] e Marcello Ciccarelli^[2]

[Segue dal numero 162]

Il modello di F. Klein della geometria iperbolica permette una differente formulazione dell'ampiezza di un angolo compreso fra due rette del piano.

Si considerino le rette a e b parallele, in senso euclideo, alle rette date e uscenti dall'origine O di un riferimento cartesiano Oxy e, inoltre, le rette isotrope $j_1: y = ix, j_2: y = -ix$ uscenti dalla stessa origine O (È utile ricordare che l'equazione $y = \pm ix$ rappresenta due rette complesse coniugate, i cui punti hanno distanza nulla dal punto O). A meno di una traslazione (x_0, y_0) , il ragionamento vale per qualsiasi punto.

Si indichino rispettivamente con α e β gli angoli che le rette a e b formano con l'asse x e sia $\varphi = \beta - \alpha$ l'angolo formato dalle rette stesse. Le equazioni delle quattro rette sono:

$$a: y = x \cdot \operatorname{tg}(\alpha), \quad b: y = x \cdot \operatorname{tg}(\beta), \quad j_1: y = ix, \quad j_2: y = -ix.$$

Si può ora considerare il birapporto dei coefficienti angolari di queste quattro rette, cioè:

$$(A) \quad k = (i, -i, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta)$$

Si ha:

$$k = \frac{(i, -i, \operatorname{tg} \alpha)}{(i, -i, \operatorname{tg} \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - i}{\operatorname{tg} \alpha + i} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta + i}{\operatorname{tg} \beta - i}$$

da cui

$$k = \frac{\sin \alpha - i \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha + i \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta + i \cdot \cos \beta}{\sin \beta - i \cdot \cos \beta}.$$

Moltiplicando i termini delle due frazioni per l'unità immaginaria i e tenendo presente che $i^2 = -1$, si ottiene:

$$k = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{-\cos \alpha + i \sin \alpha} \cdot \frac{-\cos \beta + i \sin \beta}{\cos \beta + i \sin \beta}$$

ovvero

$$k = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{(-1)(\cos \alpha - i \sin \alpha)} \cdot \frac{(-1)(\cos \beta - i \sin \beta)}{\cos \beta + i \sin \beta}$$

Ricordando la formula di Eulero sull'esponenziale di un numero immaginario, si ottiene:

$$k = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} \cdot \frac{e^{-i\beta}}{e^{i\beta}} = e^{-2i(\beta-\alpha)}$$

e posto $\beta - \alpha = \varphi$,

si ha $k = e^{-2i\varphi}$.

Passando ai logaritmi naturali: $-i 2 \varphi = \ln k$,

$$\varphi = -\frac{1}{2i} \cdot \ln k = \frac{i}{2} \cdot \ln k.$$

Ricordando che con k si è indicato un ben preciso birapporto dei coefficienti angolari di quattro rette di un fascio, per la (A), si può scrivere:

$$\varphi = \frac{i}{2} \cdot \ln(i, -i, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta)$$

e quindi

$$(B) \quad \varphi = \frac{i}{2} \cdot \ln(j_1, j_2, a, b) = \frac{i}{2} \cdot \ln(a, b, j_1, j_2)$$

ove si è tenuto conto che il valore di un birapporto non varia scambiando di posto due elementi qualsiasi tra di loro e simultaneamente gli altri due. La (B) è la ben nota formula di Laguerre, che nel 1871 Klein non ancora conosceva. L'importanza di questa formula sta nel fatto che essa può essere presa come definizione di un angolo in termini del concetto primitivo di birapporto.

Si può dimostrare che la costante $i/2$ serve ad assicurare che un angolo retto abbia ampiezza $\pi/2$.

Osservazioni didattiche sulle geometrie "non-euclidee"

Nella didattica, i vari modelli iperbolici ed ellittici di Klein, Minkowski, Riemann, Beltrami, ... assumono sempre il nome di modelli "non euclidei" e sono spesso utilizzati per indicare non solo il declino del dominio della geometria euclidea, ma anche un cambiamento culturale che va oltre la matematica. Ma a un'analisi più attenta, forse, l'accentuazione sul declino del dominio euclideo risulta un po' eccessiva. Infatti, tutti i modelli delle geometrie "non-euclidee" affrontano il *problema della coerenza logico-matematica delle nuove geometrie* assumendo proprio il modello euclideo come parametro che "misura" la loro coerenza logica. Per dimostrare la coerenza dei loro modelli, i matematici utilizzano (tutti indistintamente) la seguente procedura: 1) "traduzione", con uno specifico dizionario, di assiomi e oggetti dei modelli presi in considerazione, negli assiomi e oggetti del modello euclideo e 2) verifica che non esistono contraddizioni. Questa procedura è la conseguenza dell'idea che se le affermazioni sui modelli non evidenziano contraddizioni in ambito euclideo, allora costituiscono un modello geometricamente valido. In definitiva la *coerenza logico-matematica delle nuove geometrie* dei modelli non-euclidei è assicurata proprio dal fatto che, una volta tradotti nei termini del modello euclideo, non presentano contraddizioni. È evidente che i primi costruttori dei modelli delle nuove geometrie erano ancora ancorati all'idea che gli assiomi di Euclide fossero verità evidenti e non ipotesi arbitrarie soggette alla verifica della non contraddittorietà, come richiesto da una moderna idea di coerenza. È necessario attendere Hilbert per affermare l'idea che la coerenza è data non già dalle analogie con il modello euclideo, ma dalla non contraddittorietà delle ipotesi iniziali; ipotesi che si possono scegliere con tutta la libertà possibile purché non conducano a contraddizioni.

I modelli "non euclidei" possono, invece, risultare didatticamente decisivi per porre termine alla plurisecolare ricerca (*Euclides ab omni naevo vindicatus*) sull'indipendenza o meno del 5° postulato dai primi quattro e dalle ventotto proposizioni che da essi derivano.

Infatti atteso che (*) una proposizione P è indipendente dalle proposizioni A, B, C, \dots quando non sono contraddittori sia il sistema A, B, C, \dots, P che il sistema $A, B, C, \dots, \neg P$, abbiamo che la Geometria euclidea e le altre, verificano esattamente questa situazione, essendo sia il sistema euclideo, che gli altri sistemi "non-euclidei" coerenti. Ne segue che il quinto postulato, per la (*) è indipendente dalle proposizioni precedenti e dai primi quattro postulati.

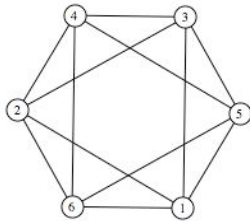
Bibliografia: [B.1] Morris Kline, *Storia del Pensiero Matematico*, Ed. Einaudi, Torino, 1996. [B.2] Enzo Martinelli, *Lezioni di Geometria*, Libreria M. Bozzi, Genova, 1954, pag. 116. [B.3] Benvenuti S., *Geometrie non euclidee*, Gli Spilli, Milano, 2008, pag. 75.

[1] Dottore in matematica di Latina. [2] Socio della Mathesis di Latina, email: marcello.ciccarelli@gmail.com

Ricerca di Circuiti Euleriani in un Grafo

Manuel Zambelli ^[3]

L' algoritmo che presenterò di seguito nasce nel corso di una serie di lezioni tenute dal Prof. Enrico Gregorio all'interno del mio Istituto, ITIS Marconi, nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche (Graf: problemi e applicazioni).
Supponiamo per esempio di avere il seguente grafo



la cui matrice di adiacenza è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La presenza di uno zero nella posizione ij indica che non esiste un arco che collega il nodo i con il nodo j del grafo. Inoltre, poiché il grafo non è orientato, la matrice di adiacenza è simmetrica.

Come si può notare (il grado di ogni nodo è pari!), il grafo proposto è euleriano e pertanto ammette un circuito chiuso. In altre parole, partendo da un vertice qualsiasi è possibile percorrere una e una sola volta tutti i lati tornando al punto iniziale.

Ma la domanda chiave è:

Come trovare un circuito euleriano?

Assegnato un ordinamento ai vertici del grafo, la mia idea è quella di scegliere ad ogni passo il lato disponibile (quindi ancora non visitato) che termina nel vertice più lontano da quello iniziale (indice 1).

Nell'esempio:

1 → 6
6 → 5
5 → 4 (perché il lato (5,6) è già stato percorso!)
4 → 6
6 → 2
2 → 4
4 → 3
3 → 5
5 → 1
3 → 2
2 → 1

Tutto questo, nella matrice, si traduce in un movimento alternato verso destra (quanto più lontano dalla colonna 1) e verso il basso (quanto più lontano dalla riga 1) che ho tradotto in pseudocodice così:

```
begin
m = matrice
num = numero righe di m (* uguale al n. di colonne *)
n = numero di lati del grafo
percorso = {1}
x = 1
y = 1
while(Length[percorso] < n)
...for j = num, j > 0, j--,
.....if m[x][j] == 1,
.....m[x][j] = 0
```

```
.....m[j][x] = 0
.....aggiorna percorso inserendo il vertice di indice j
.....y = j
.....break (* esci da ciclo for *)
.....fine se
...fine scorrimento
...for i = num, i > 0, i--,
.....if m[i][y] == 1,
.....m[i][y] = 0;
.....m[y][i] = 0
.....aggiorna percorso inserendo il vertice di indice i
.....x = i
.....break (* esci da ciclo for *)
.....fine se
...fine scorrimento
fine finché
stampa percorso
end.
```

Ecco il programma completo scritto con Mathematica 7 (N.B. Il grafo oggetto di studio deve essere euleriano. Ho ommesso, per brevità, un controllo iniziale in tal senso):

```
matrice={
{0,1,1,0,1,1},
{1,0,1,1,0,1},
{1,1,0,1,1,0},
{0,1,1,0,1,1},
{1,0,1,1,0,1},
{1,1,0,1,1,0}
};

(* calcolo numero lati/archi del grafo *)
n = 0;
For[t = Length[matrice], t > 0, t--, {
For[z = Length[matrice], z > 0, z--, {
If[matrice[[t]][[z]] == 1, n++]
}]}
}];
n = n/2;
(* inizializzazione delle variabili *)
x = 1; y = 1;
percorso = {1};
(* determinazione del percorso *)
While[Length[percorso] < n, {
For[j = Length[matrice], j > 0, j--, {
If[matrice[[x]][[j]] == 1, {
matrice[[x]][[j]] = 0,
matrice[[j]][[x]] = 0,
AppendTo[percorso, j],
y = j,
Break[]}]
}]}
For[i = Length[matrice], i > 0, i--, {
If[matrice[[i]][[y]] == 1, {
matrice[[i]][[y]] = 0,
matrice[[y]][[i]] = 0,
AppendTo[percorso, i],
x = i,
Break[]}]
}]}
}];
(* stampa *)
Print["Il percorso è: ", percorso]
lati = {};
For[i = 1, i < Length[percorso], i++, {
AppendTo[lati, percorso[[i]] -> percorso[[i + 1]]]
}]}

```

L'output del programma è una lista che indica la sequenza ordinata dei vertici del grafo da visitare per completare il ciclo. Nell'esempio: {1, 6, 5, 4, 6, 2, 4, 3, 5, 1, 3, 2, 1}.

[3] Studente - e-mail: manuelzambelli@gmail.com