ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 165 – Pubblicato il 09 – 01 – 2012

La tendenza alla perfezione dei numeri naturali

di Silvio Maracchia [*]

I matematici greci chiamarono "perfetto" (tel{eioj}) un numero allorché la somma dei suoi divisori a lui minori è uguale al numero stesso. Ad esempio 6 è un numero perfetto, anzi è il più piccolo numero perfetto, dato che i suoi divisori 1; 2; 3; hanno proprio 6 come somma. Ugualmente sono perfetti i numeri:

$$28 = 1+2+4+7+14$$
$$496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

Molto si è favoleggiato sui numeri perfetti e molti risultati matematici sono stati ottenuti, noi ci limitiamo ad osservare che i tre numeri perfetti indicati si possono porre nella forma:

$6 = 2(2^2 - 1);$

$28 = 2^2(2^3 - 1);$

$496 = 2^4(2^5 - 1);$ del tipo: $2^n(2^{n+1} - 1)$.

Notiamo però che questa formula non fornisce un numero perfetto per ogni valore di n; infatti, ad esempio, per $n = 3$ si ottiene $2^3(2^4 - 1) = 120$ che non è numero perfetto dato che la somma dei divisori 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60 è maggiore di 120 [1]. Possiamo osservare un'altra singolarità nei primi numeri perfetti considerati: i numeri 3, 7, 31, quelli tra parentesi, sono numeri primi.

Ebbene Euclide dimostrò nella 36ma proposizione del libro IX dei suoi *Elementi* che questa condizione è sufficiente perché il numero (pari) sia perfetto.

Supponiamo infatti che il numero N abbia la forma:

$2^n (2^{n+1} - 1)$

e che $2^{n+1} - 1$ sia numero primo. In questo caso, proprio per la circostanza che $2^{n+1} - 1$ è numero primo, sono divisori di N i numeri:

$1;\ 2;\ 2^2;\ 2^3; \dots\ 2^n;\ (2^{n+1} - 1);\ 2\cdot(2^{n+1} - 1);\ 2^2\cdot(2^{n+1} - 1);\ 2^3\cdot(2^{n+1} - 1); \dots\ 2^{n-1}\cdot(2^{n+1} - 1)$

La cui somma

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n +$$
$$+ (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1})\,(2^{n+1} - 1) =$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{2-1} + \frac{2^n-1}{2-1}\cdot\left(2^{n+1}-1\right) = (2^{n+1} - 1)\,(1 + 2^n - 1) =$$
$$= 2^n\,(2^{n+1} - 1) = N.$$ [2]

Ed ecco come si esprime Euclide: «*Se, partendo dall'unità si prendano quanti si vogliano numeri raddoppiando successivamente sino a che la loro somma venga ad essere un numero primo, e la somma stessa venga moltiplicata per l'ultimo dei numeri considerati, il prodotto sarà un numero perfetto*».

Dunque, se la somma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$, uguale a $(2^{n+1} - 1)$, è un numero primo, allora, dice Euclide, moltiplicando per l'ultimo addendo 2^n si ottiene (come noi abbiamo già visto) un numero perfetto.

Questa condizione sufficiente diventa con Eulero e cioè duemila anni dopo, anche necessaria per i numeri pari. In altre parole, se un numero pari è perfetto non può essere che della forma $2^n(2^{n+1} - 1)$ con $(2^{n+1} - 1)$ numero primo. [3]

Tralasciamo la dimostrazione [4], nella presente nota vogliamo solo osservare una proprietà dei numeri naturali che possiamo accostare a quella vista per i numeri perfetti.

Ricordiamo a tale proposito *l'indicatore di Gauss f(N)* che indica "il numero dei numeri minori di N e con lui primi". Ad esempio: f(1) = 1; f(2) = 1; f(3) = 2; f(4) = 2; f(5) = 4; f(6) = 2 e così via.

Ebbene, si può dimostrare [5] che indicando con d_1; d_2; … d_n tutti i divisori di un qualsiasi numero N (compreso n stesso), si ha ("teorema di Gauss"):

$$f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(d_n) = N;$$

ad esempio: per N = 24 i cui divisori sono 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24, si ha infatti:

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(6) + f(8) + f(12) + f(24) = 1+ 1+ 2+ 2 + 2 + 4 + 4 +8 = 24;$$

con N = 40 i cui divisori sono: 1; 2, 4; 5; 8; 10; 20; 40; si ha:

$$f(1) + f(2) + f(4) + f(5) + f(8) + f(10) + f(20) + f(40) = 1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 4 +8 + 16 = 40.$$

Ebbene, se un numero è perfetto è uguale alla somma *dei suoi divisori* (tranne se stesso); un qualunque numero, invece, è uguale alla somma di tutti gli indicatori di Gauss *di tutti i suoi divisori* (se stesso incluso). Non è certamente la stessa cosa ma vi è comunque una certa "parentela" trattandosi in entrambi i casi di divisori del numero anche se tranne il numero stesso nel caso dei numeri perfetti e lo si considera nel secondo caso. [6]

$$28 = 1 + 2 + 4 +7 + 14$$
$$28 = f(1) + f(2) + f(4) + f(7) + f(14) + f(28).$$

Note:

[1] In questo caso il numero si dice "eccedente" mentre sarebbe "deficiente" se la somma dei divisori risultasse minore del numero, il che avviene, ad esempio, per tutti i numeri primi che hanno solo l'unità per divisore diverso dal numero stesso.

[2] Si ricordi la formula $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = (a^{n+1} - 1) / (a - 1)$.

[3] Un problema ancora aperto è se esistono o meno numeri perfetti dispari; tutto fa pensare che non ve ne siano ma una dimostrazione in tal senso ancora non esiste.

[4] Per la dimostrazione cfr. ad esempio, S. Maracchia, *I numeri perfetti* in"Archimede" 1977, n.1, pp. 58-61.

[5] Cfr. ad esempio, Guido Ascoli, *Lezioni di Algebra*, Tirrenia, Torino, 1965, pp. 31-37.

[6] Se il numero è perfetto considerando tra i divisori anche se stesso si ha per risultato il doppio del numero stesso.

[*] Già docente di Storia della Matematica presso l'Università "La Sapienza" di Roma e già Presidente Nazionale della Mathesis

Pierino e certi assiomi

di Luciano Corso

Il 28 ottobre, a Caserta, durante il Congresso Nazionale della Mathesis il prof. Grabriele Lolli (Logica Matematica, Scuola Normale di Pisa) ha tenuto una relazione dal titolo "Pensiero matematico e pensiero fisico". Il punto saliente del suo intervento si è basato sull'idea che quando si fa matematica nelle scuole medie superiori occorre considerare che gli studenti hanno un'età in cui la fisicità che portano dentro assume un'importanza dominante, rispetto a ogni altra questione. Perciò, è opportuno ridurre al minimo la loro concentrazione su dimostrazioni formali e su principi rigorosamente esposti, per dare spazio a una matematica maggiormente legata all'esperienza, alla fisica intesa nel senso più ampio del termine, orientando le dimostrazioni dei teoremi e la spiegazione degli assiomi, insomma il metodo ipotetico deduttivo, verso approcci sperimentali. C'è la possibilità di dimostrare almeno alcuni teoremi classici con metodi "fisici" che possono aiutare gli studenti più distratti a capire i concetti contenuti nei teoremi. Lolli ha accompagnato la sua relazione con numerosi esempi, tutti interessanti, tratti da pubblicazioni di diversi autori. Ho condiviso i contenuti della relazione di Lolli; essa, poi, mi ha ispirato le seguenti considerazioni.

Pierino e l'assioma dell'additività

Pierino è un ragazzo che si interessa di tutto ciò che lo circonda. Conosce l'aritmetica e sa contare bene. La maestra gli ha insegnato a sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere due numeri. Gli ha insegnato, inoltre, che non si possono fare somme o sottrazioni con diverse unità di misura. La maestra gli ha detto che se le pecore di un gregge sono 48 e quelle di un altro 64 , se si uniscono i due greggi formandone uno solo, le pecore di quest'ultimo sono 48 + 64 = 112. Pierino si vuole accertare della validità di questo tipo di affermazioni: conta, perciò, le pecore di questo nuovo gruppo e trova che il loro numero è proprio 112. Ma vale in generale il principio? Egli si ricorda che nell'officina del papà c'è una grossa bilancia che pesa oggetti voluminosi. La bilancia ha il quadro rotondo su cui si trovano delle tacche numerate da 0 a 500 chilogrammi. Vuole verificare se questo principio vale anche per i pesi. Quando ritorna a casa fa salire sulla bilancia il papà e vede che la bilancia sposta l'asta indicatrice del peso da 0 a 74. Fa scendere dal piatto il papà (l'indicatore ritorna a 0) e sale lui. L'indicatore si sposta con l'asta su 39. Se è vero ciò che gli ha insegnato la maestra, la somma dei due pesi registrati da Pierino dovrebbe corrispondere al peso segnato dalla bilancia se sul suo piatto sale con Pierino anche il papà. Il peso che Pierino si attende di vedere segnato dall'indicatore della bilancia è perciò 74 kg + 39 kg = 113 kg. Egli quindi dice al papà di risalire sulla bilancia. Il papà risale e Pierino, in effetti, vede che l'indicatore si porta sulla tacca 113. Pierino non è ancora convinto della validità generale del principio. Vuole altri esempi a sua conferma. Vuole accertarsi che la regola valga anche per le distanze. Per andare a scuola egli è obbligato a passare dalla stazione ferroviaria. Per andare da casa alla stazione deve compiere un percorso spezzato tra le vie e i vicoli della città. La distanza (di Manhattan) da casa alla stazione è di 1200 m, mentre quella che dalla stazione porta a scuola è di 800 m. Applicando la regola imparata a scuola, egli conclude che la distanza da casa a scuola è di 1200 m + 800 m = 2000 m. Un amico di famiglia è un topografo e si presta con gli opportuni strumenti a misurare la distanza, confermandogli poi la giustezza del risultato. Nel frattempo la maestra di esperimenti ne ha fatti altri e sempre la regola si è dimostrata valida. A questo punto Pierino si convince che dati due oggetti (insiemi) disgiunti la misura associata alla loro unione è uguale alla somma delle misure associate ai singoli oggetti distinti e la regola è indipendente dalle unità di misura associate ai singoli insiemi. I matematici scrivono questa regola nel modo seguente:

$$(A \cap B = \varnothing) \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\,. \qquad (1)$$

Pierino per arrivare a questa conclusione ha dovuto accettare (più o meno implicitamente) tre diverse condizioni: 1) gli oggetti A e B devono essere espressi nella stessa unità di misura (si sommano, infatti, pecore con pecore, chilogrammi con chilogrammi, metri con metri); 2) i due oggetti devono essere disgiunti; 3) poche prove, rispetto all'infinità delle prove possibili, bastano a trarre una conclusione generale. Pierino, però, non sa che la sua conclusione (1) è una ragionevole congettura. Inferire, infatti, da poche prove una regola generale è un atto rischioso: i risultati possono ingannare. Insomma, la regola (1) vale o no? Pierino ritiene che valga: tutti i pierini del mondo non mettono in dubbio questa regola, tuttavia essa è validata solo da conferme sperimentali in un dato contesto, non da dimostrazioni matematiche; quando la regola non tiene, c'è il sospetto che i due eventi A e B non siano statisticamente indipendenti.

Le ragionevoli congetture reggono comunque perché fanno parte del nostro DNA e hanno garantito la sopravvivenza della specie *Homo sapiens* su questa Terra. Tutte le ragionevoli congetture, pur avendo limiti di validità, devono pur essere accettate se costituiscono basi importanti per conoscere il mondo. I primi pierini della specie *Homo sapiens*, circa 50 000 anni fa, hanno sperimentato che la regola (1) tiene su poche prove e hanno indotto che potesse reggere *sempre* (è possibile esporre delle convinzioni senza usare termini metafisici?). L'uomo ha accettato questa convinzione e ha assegnato alla regola un "sempre" definitivo, dandole dignità di assioma.

Rimane aperto un problema: gli assiomi, in generale, sono di origine sperimentale o possono scaturire anche da pure manovre del pensiero (senza alcun riferimento empirico)? La risposta appartiene al mondo dell'opinabile, ma io credo che senza esperienza, non si cavi un ragno dal buco (il che è davvero difficile farlo, se lo si vuole estrarre vivo: provare per credere!).

Pierino e l'assioma di Eudosso-Archimede

L'assioma di Eudosso-Archimede è genetico (appartiene cioè da sempre al nostro DNA) o di origine sperimentale?

$$\left(\forall a, b \in \mathbf{R}_0^+,\ a < b\right) \Rightarrow \left(\exists n \in \mathbf{N} : n \cdot a > b\right) \qquad (2)$$

Tutti i pierini della Terra con un semplice esperimento arrivano a congetturare la regola. Provate a dare due corde di lunghezza diversa a dei ragazzi e a fissare due punti P e Q a distanza arbitraria su un prato dicendo loro di coprire con tratti di corda disgiunti ma aderenti lo spazio retto tra i due punti prima con la corda più lunga e poi con quella più corta; i pierini, dopo l'esperimento, concluderanno, per ognuna delle corde, che esiste in generale un numero naturale n di giunzioni di corda che permette di ricoprire il tratto PQ, sopravanzandolo.

Le ragionevoli congetture basate su un numero finito di prove garantiscono il maggior successo selettivo, anche se Il passaggio da queste agli assiomi è un salto pericoloso (ma necessario), sostenibile solo dalla significatività statistica dei risultati ottenuti. Comunque, con a, b, n finiti e positivi l'assioma archimedeo non ha mai avuto controprove sperimentali sfavorevoli. Questo assioma, a partire dagli assiomi di campo e dall'assioma di completezza di $\mathbf{R}$, diventa un teorema [Apostol T., Calcolo, vol. 1, pagine 33 e 34, Bollati Boringhieri, Torino, 1985].

Le ragionevoli congetture e il pollo induttivista di Russell

«Ragionevoli congetture» non è una locuzione vaga. Essa fa riferimento al *postulato empirico del caso* che, a sua volta, è sostenuto dalla *legge dei grandi numeri* che è il risultato di una applicazione del teorema di convergenza, in probabilità, di particolari successioni di variabili aleatorie (X_n) alla variabile aleatoria X. Il teorema afferma che preso un $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

$$(n \to +\infty) \Rightarrow \left[Prob\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0 \right], \qquad (3)$$

e il postulato sostiene che la tesi tiene anche per n finito, purché grande. Quindi, se X è il termine "vero" di un'indagine, allora il termine generale X_n di una successione di risultati ottenuti con esperimenti fatti per verificare X, deve avvicinarsi, in probabilità, a X per n crescente e la casualità agisce tendenzialmente di meno all'aumentare delle prove di un esperimento. Pierino lo può verificare in laboratorio con semplici simulazioni. Esiste la possibilità dell'inganno dell'induzione del pollo di Russell, ma la probabilità di successo associato al comportamento del pollo induttivista, in generale, è maggiore di quella associata a un diverso processo decisionale.