ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 166 – febbraio – pubblicato il 29 – 02 – 2012

Problema geometrico per i Licei

di Nazario Magnarelli

Il problema è stato proposto, nel mese di Aprile 1998, dalla rivista *Insegnamento della Matematica* del Centro Ricerche "U. Morin", Paderno del Grappa (TV) .

In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, è inscritto un cerchio di raggio r e centro I (*si veda la nota in fondo al foglio*). Detto M il punto medio dell'ipotenusa e AB il cateto minore, si supponga che l'angolo $B\hat{I}M$ sia retto. Si determini, sotto questa ipotesi, il rapporto dei cateti del triangolo dato.

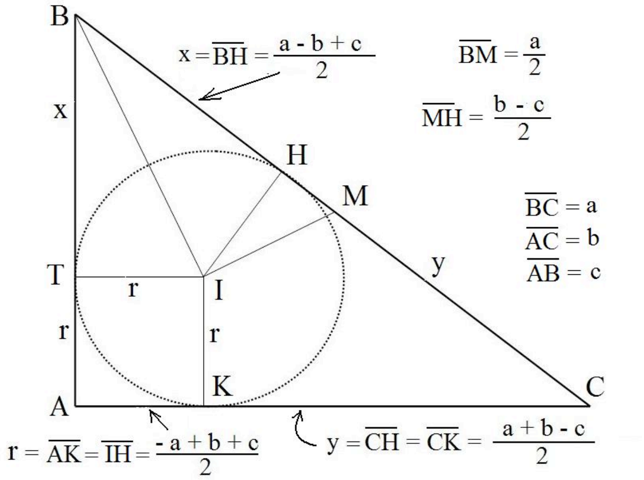

Figura 1

Risoluzione

Siano rispettivamente H, K, T i punti di tangenza del cerchio con i lati BC, CA, AB del triangolo: in questi punti il raggio del cerchio inscritto è perpendicolare ai lati. Indichiamo poi con a, b, c le lunghezze dei lati opposti rispettivamente ai vertici A, B, C del triangolo; quindi (Fig. 1):

$|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, con $c < b < a$.

Ponendo $|BH| = |BT| = x$, $|CH| = |CK| = y$, $|AK| = |AT| = |IH| = r$ si ha il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 0 = a, \\ 0 + y + r = b, \\ x + 0 + r = c \ . \end{cases}$$

la cui soluzione è

$y = (a + b - c) / 2$, e

(1) $x = (a - b + c) / 2$,

(2) $r = (-a + b + c) / 2$.

Con la (1) si ricava:

$$|HM| = |BM| - |BH| = \frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} - \frac{a - b + c}{2}$$

(3) $$|HM| = \frac{b - c}{2} \ .$$

Se ora l'angolo $B\hat{I}M$ è retto, come dice l'ipotesi, possiamo applicare il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo MIB, di cui abbiamo trovato l'altezza r relativa all'ipotenusa e le proiezioni dei cateti su di essa. Si ha:

(4) $|IH|^2 = |MH| \cdot |BH|$.

Sostituendo le (2), (3), (1) possiamo scrivere

$(-a + b + c)^2 / 4 = ((b - c) / 2) \cdot ((a - b + c) / 2)$

da cui

$a^2 + (b + c)^2 - 2a(b + c) = a(b - c) - (b - c)^2$,

quindi

(5) $a^2 + (b^2 + c^2) + \cancel{2bc} - 2ab - 2ac = ab - ac - (b^2 + c^2) + \cancel{2bc}$.

Poiché il triangolo ABC è rettangolo in A si ha $b^2 + c^2 = a^2$.

Sostituendo nella (5) e riducendo i termini simili si ha:

(6) $a^2 + a^2 + a^2 = 3ab + ac$, $3a^2 = a \cdot (3b + c)$.

Semplificando e innalzando al quadrato si ha

(i) $9a^2 = 9b^2 + c^2 + 6bc$.

Ricordando ancora che $a^2 = b^2 + c^2$ si ha di seguito:

(ii) $\cancel{9b^2} + 9c^2 = \cancel{9b^2} + c^2 + 6bc$, $8c^2 - 6bc = 0$, con $c \neq 0$.

Quindi :

(7) $4c = 3b$, $c / b = 3 / 4$.

Abbiamo così trovato che i cateti sono nel rapporto 3/4 e quindi essi sono proporzionali a:

(8) $c = 3k$, $b = 4k$; ipotenusa $a = \sqrt{(9k^2 + 16k^2)} = 5k$.

I numeri 3k, 4k, 5k sono quelli di una famosa terna pitagorica.

Generalizzazione del problema

di Arnaldo Vicentini [1] e Nazario Magnarelli [2]

Il presente lavoro è un'estensione di un problema proposto, nel mese di Aprile del 1998, dalla rivista *Insegnamento della Matematica* del Centro Ricerche "Ugo Morin" di Paderno del Grappa (TV).

In un triangolo acutangolo ABC i lati sono nella relazione $|AB| < |AC| < |CB|$. Detto M il punto medio del lato maggiore BC e I il centro del cerchio inscritto, si supponga che l'angolo $B\hat{I}M$ sia retto. Sotto tale ipotesi si trovi una relazione algebrica fra i lati del triangolo dato. Supposto poi che l'angolo in A sia retto, si sfrutti questa relazione per trovare il rapporto fra i cateti del triangolo rettangolo ottenuto.

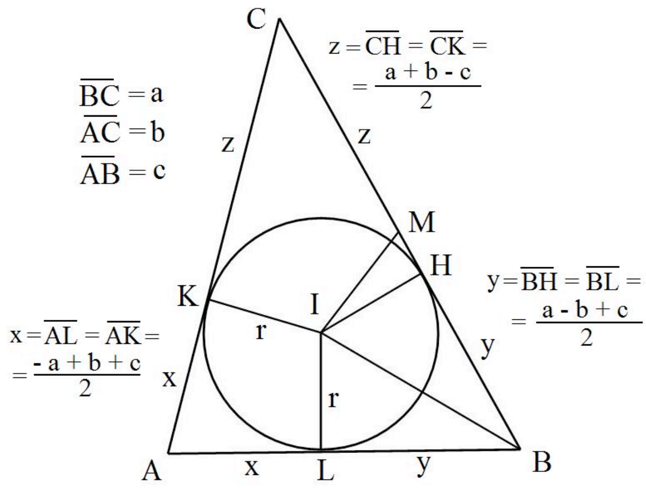

Figura 2

Risoluzione

Conosciamo la formula di Erone per il calcolo dell'area della superficie del triangolo acutangolo (fig. 2) e anche la formula per determinare il raggio del cerchio a esso inscritto.

Siano a, b, c le lunghezze dei lati opposti rispettivamente ai vertici A, B, C; quindi $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ con $c < b < a$. Detti poi L, H, K i punti di tangenza dei lati AB, BC, CA con il cerchio inscritto, possiamo porre :

(1) $x = |AL| = |AK|$, $y = |LB| = |BH|$, $z = |CH| = |CK|$.

Si ottiene allora il sistema lineare

(2) $$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases}$$

Soluzione

(3) $x = (-a + b + c) / 2$, $y = (a - b + c) / 2$, $z = (a + b - c) / 2$.

Posto $a + b + c = 2p$ (lunghezza del perimetro del triangolo), il raggio del cerchio inscritto nel triangolo è

(4) $r = S / p$

e ricordando la formula di Erone per l'area S del triangolo possiamo dire:

(5) $$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p+c)}}{p},$$

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{8p}.$$

Tenendo presente che:

$2(p - a) = -a + b + c$, $2(p - b) = a - b + c$,
$2(p - c) = a - b + c$

si ottiene :

(6) $$r^2 = \frac{(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4(a+b+c)}.$$

La (6) permette di calcolare le distanze dell'incentro I dai vertici del triangolo. Con Pitagora, in particolare, si ha:

$$|IB|^2 = r^2 + y^2 =$$

$$= \frac{(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4(a+b+c)} + \frac{(a-b+c)^2}{4}$$

Mettendo in evidenza il fattore $(a - b + c)$ possiamo scrivere :

(7) $$|IB|^2 = \frac{(a-b+c)\cdot P}{4(a+b+c)},$$

Ove si è posto

$P = (-a+b+c)\cdot(a+b-c) + (a-b+c)\cdot(a+b+c)$.

Sviluppando P si trova

$P = 4ca$,

e quindi

(8) $$|IB|^2 = ca\cdot\frac{a-b+c}{a+b+c}.$$

Intanto, poiché

(9) $|BM| = a / 2$ e $|BH| = y = (a - b + c) / 2$,

si trova subito :

$$|HM| = \frac{a}{2} - y = \frac{a}{2} - \frac{a-b+c}{2}, \quad |HM| = \frac{b-c}{2}.$$

Applicando ora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo HIM possiamo trovare il quadrato del segmento |IM|. Si ha:

(10) $$|MI|^2 = |HM|^2 + r^2 =$$

$$= \frac{(b-c)^2}{4} + \frac{(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4(a+b+c)},$$

(11) $$|MI|^2 = \frac{(a+b+c)(b-c)^2 + (-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4(a+b+c)}.$$

Dobbiamo ora trovare un'espressione opportuna per il numeratore N della frazione. Si ha:

$N = (a + b + c)(b - c)^2 + (- a + b + c)\cdot[a + (c - b)]\cdot[a - (c - b)]$,
$N = (a + b + c)\cdot(b - c)^2 + (- a + b + c)\cdot[a^2 - (c - b)^2]$,
$N = (a + b + c)\cdot(b - c)^2 + a^2(- a + b + c) - (-a + b + c)\cdot(c - b)^2]$

e quindi

(12) $N = 2a(b - c)^2 + a^2 (-a + b + c)$.

Sostituendo nella (11), possiamo trovare $|MI|^2$. Si ha:

(13) $$|MI|^2 = \frac{2a(b-c)^2 + a^2(-a+b+c)}{4(a+b+c)}.$$

Possiamo ora avviarci verso la fine del problema. Detto δ l'angolo MÎB, applicando il teorema di Carnot al triangolo BIM si ha:

(14) $$\cos(\delta) = \frac{|MI|^2 + |BI|^2 - |MB|^2}{2\cdot|MI|\cdot|BI|}.$$

Imponiamo la condizione che l'angolo δ sia retto, come richiesto dal testo del problema. Deve essere allora $\cos(\delta) = 0$, e quindi il numeratore della frazione deve essere nullo, cioè

(15) $|MI|^2 + |BI|^2 - |MB|^2 = 0$.

Sostituendo in questa i valori dati dalle (13), (8) , (9) si ha :

(16) $$\frac{2a(b-c)^2 + a^2(-a+b+c)}{4(a+b+c)} + \frac{ca\cdot(a-b+c)}{a+b+c} - \frac{a^2}{4} = 0.$$

Semplifichiamo per a (≠ 0) e troviamo il m.c.m.; si ha l'equazione

(i) $2(b - c)^2 + a\cdot(-a + b + c) + 4c\cdot(a - b + c) - a(a + b + c) = 0$

e da questa subito si ricava la condizione:

(17) $(b^2 + c^2 - a^2) + 2c\cdot(a + c - 2b) = 0$.

Abbiamo così risposto al primo quesito.
Se ora il triangolo ABC è retto in A, per il teorema di Pitagora si ha $b^2 + c^2 - a^2 = 0$; ne segue

(ii) $4c\cdot(a + c - 2b) = 0$;

infine, essendo $c \neq 0$, $a = 2b - c$, quadrando si ottiene

(iii) $a^2 = 4b^2 + c^2 - 4bc$.

Da questa $b^2 + c^2 = 4b^2 + c^2 - 4bc$, ossia $4bc = 3b^2$.
Infine, dividendo per b, si ha l'eguaglianza di rapporti:

(18) $(b / c) = (4 / 3)$,

da cui

(19) $b = 4k$, $c = 3k$ ipotenusa: $a = \sqrt{(16k^2 + 9k^2)} = 5k$.

I numeri 3k, 4k, 5k sono quelli di una famosa terna pitagorica.

Nota: Per ragioni tipografiche adottiamo una variante rispetto alla tradizionale simbologia. La lunghezza di un segmento XY, invece di segnalarla come XY con barra sovrapposta, la indichiamo con il simbolo |XY|. Salviamo così la regolarità dell'interlinea. Nelle figure il problema non esiste.

[1] già docente di Fisica presso l'ITIS G. Marconi di Verona
[2] Socio Mathesis di Latina

E l'acqua fresca nasce

di Roberto Piumini

E l'acqua fresca nasce
fa ruscelli
scende
casca sui sassi
scroscia e frusciando fa il fiume.
E l'acqua sciolta nuota nelle valli
e lunga e lenta
larga silenziosa
luminosa fa il lago.
E l'acqua a onde muore
non muore mai
e muore
non muore mai
e muore
mentre immensa fa il mare.