MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – lcorso@itisgmarconi.vr.it – Stampa in proprio - Numero 17 – maggio 1999

Classi o collezioni (e loro notazione)

di Ruggero Ferro

La tesi che voglio sostenere mediante alcuni interventi in questo foglio è che la matematica non è solo un utile linguaggio, ma che è anche una proposta di importanti nozioni. Molte delle nozioni matematiche sono precisate nello sviluppo della stessa matematica mediante definizioni che permettono una presentazione non equivoca delle nozioni introdotte una volta che siano noti i significati dei termini usati nelle definizioni. Ciò porta naturalmente ad un regresso verso nozioni sempre più basilari, regresso che non può proseguire all'infinito, e che, perciò, dovrà essere arrestato ad un certo punto. Si perverrà, così, a delle nozioni che non saranno più definite, le cosiddette nozioni primitive. Sorge allora il problema di precisare le nozioni primitive, certo non attraverso una definizione, e di dare significato alle parole che le indicano. Cercherò di mostrare come, facendo ricorso all'esperienza, si possa dare una vaga idea del significato dei termini primitivi, idea che si può cercare di affinare sempre meglio, senza pretendere di poterla precisare completamente. Inizierò questo percorso affrontando le nozioni basilari della teoria degli insiemi.

Si dice <u>classe</u> o <u>collezione</u> una totalità di cose su cui si è scelto di fissare la propria attenzione (le due parole vengono qui considerate sinonimi, ma non sinonimi alla parola insieme che indica una nozione che considereremo altrove). Le singole cose considerate vengono dette <u>elementi</u> della classe. Ad esempio la lettera *a* è un elemento della classe delle lettere dell'alfabeto, mentre il sole non è un elemento della stessa classe. Nel considerare un elemento non interessa come viene caratterizzato o di quali proprietà gode, cioè si astrae da tutte le sue caratteristiche, fuorché da quella di poter essere distinto da un elemento diverso.

Si usa dare nomi sia agli elementi di una classe, sia alla classe : così se con *a* si indica un elemento e con *S* si indica una classe, si può dire che *a* è un elemento di *S*. Si dice anche che *a* appartiene ad *S*. Per indicare l'appartenenza di un elemento ad una classe si usa il simbolo $\in$. Così si può scrivere $a \in S$. Per indicare che un elemento non appartiene ad una classe si userà il simbolo $\notin$.

Ogni classe è determinata dai suoi elementi, qualunque sia il modo mediante il quale vengono descritti (questa caratteristica del concetto di classe è detta <u>estensionalità</u>: infatti per individuare una classe guardiamo a quali elementi si estende e non al modo come questi vengono descritti). Perciò due diverse descrizioni di classi indicano la stessa classe se la classe indicata dalla prima descrizione e quella indicata dalla seconda descrizione hanno gli stessi elementi. Spesso si assume, com'è naturale, che per conoscere una classe sia necessario conoscere prima in qualche modo i suoi elementi. Anche questa è una proprietà molto importante della nozione di classe che viene chiamata <u>fondatezza</u>: infatti attraverso la conoscenza dei suoi elementi vogliamo dare fondamento alla classe considerata. Si noti, però, che non si richiede nessuna effettività sul modo di conoscere gli elementi, né si pongono limiti alla conoscenza degli elementi, limiti che potrebbero riflettere i limiti umani del conoscere. Si richiede solo una precedenza nel conoscere gli elementi, senza precisare cosa voglia dire conoscere e come si conosca. Così la formulazione della fondatezza rimane molto vaga per l'imprecisione su cosa significa conoscere. Senza voler risolvere questo problema ci si potrebbe accontentare di precisare come superare detta vaghezza almeno in quei casi che risulteranno importanti per lo sviluppo dell'argomento che si vuol studiare: ciò non sarà fatto qui.

Se si possono elencare gli elementi che si stanno considerando, allora si userà la seguente notazione per indicare la classe a cui appartengono esattamente quegli elementi: si inizia con la parentesi graffa aperta seguita dai nomi degli elementi dell'elenco separati da virgole, e si termina con la parentesi graffa chiusa. Così se a,b,c,d,e sono i nomi di cinque elementi che vogliamo considerare, la classe a cui appartengono esattamente quegli elementi può essere indicata con la seguente scrittura {a,b,c,d,e}. Se invece gli elementi che si vogliono considerare sono tutti quelli che godono di una certa proprietà, allora la notazione che si userà per indicare la classe a cui appartengono esattamente quegli elementi sarà la seguente: si inizia con la parentesi graffa aperta seguita da un simbolo che indica un qualsiasi elemento che apparterrà alla classe (x, ad esempio) e dal segno di interpunzione «:» (che si leggerà «tale che»); poi si scrive la proprietà che caratterizza gli elementi che vogliamo considerare attribuendola al simbolo x; e si termina con la parentesi graffa chiusa (a volte nella letteratura al posto del segno di interpunzione «:» si trova il segno « | »). Così per indicare la classe i cui elementi sono i numeri naturali pari si può scrivere così: {x : x è un numero naturale pari}.

Successioni di eventi

di Luciano Corso

[*Segue dal n. 15*] Una successione $\{A_n\}$ di insiemi (eventi) in Ω, con $n \in \mathbf{N}$, si dice monotona non decrescente se $A_n \subseteq A_{n+1}$, se cioè ciascun suo elemento è contenuto nel successivo. Una successione $\{A_n\}$ si dice monotona non crescente se $A_n \supseteq A_{n+1}$, se cioè ciascun suo elemento contiene il successivo. Una successione si dice monotona se è monotona non decrescente oppure non crescente. Data una successione $\{A_n\}$, si definisce suo limite superiore l'insieme:

$$\mathit{lim\ sup}\ A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \,. \qquad (1)$$

Data una successione $\{A_n\}$, si definisce suo limite inferiore l'insieme

$$\mathit{lim\ inf}\ A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \,. \qquad (2)$$

Quindi il limite superiore ha questa costruzione:

$\alpha_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$
$\alpha_2 = A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$
$\alpha_3 = A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$
……………………………………………
……………………………………………
$\alpha_1 \supseteq \alpha_2 \supseteq \alpha_3 \supseteq \ldots$
$\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \ldots \cap \alpha_n \cap \ldots$
lim sup $A_n = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_n \cap \ldots$

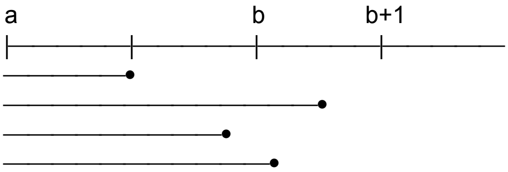
Il limite inferiore invece ha questa costruzione:

$\beta_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$
$\beta_2 = A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$
$\beta_3 = A_3 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$
……………………………………… ……….
……………………………………………...
$\beta_1 \subseteq \beta_2 \subseteq \beta_3 \subseteq \ldots$

$\beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3 \cup \ldots \cup \beta_n \cup \ldots$
lim inf A_n = $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_n \cup \ldots$
Se il limite superiore è uguale al limite inferiore, si dice che la successione ha limite. Facciamo ora un esempio per chiarire meglio i concetti sopra espressi. Il seguente insieme:

$$A_n = \left(a\ , b + \frac{(-1)^n}{n} \right] \qquad con \quad n \in \mathbf{N}$$

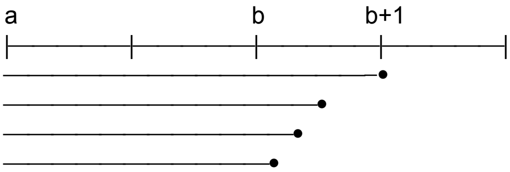
è una successione di insiemi che ha limite superiore uguale a: *lim sup A_n = (a,b]* e limite inferiore pari a: *lim inf A_n = (a,b)* per cui: *lim sup $A_n \neq$ lim inf A_n*. Diamo una rappresentazione grafica della situazione:



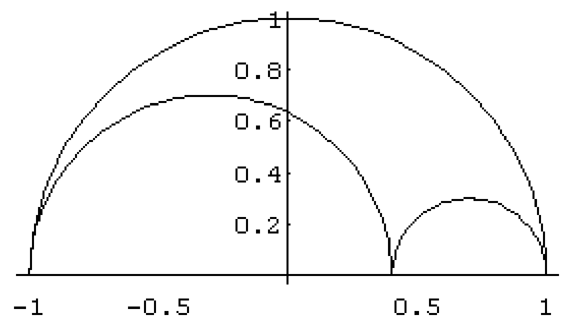
Invece la successione di insiemi:

$$A_n = \left(a\ , b + \frac{1}{n} \right] \qquad con \quad n \in \mathbf{N}\ ,$$

ha limite superiore e limite inferiore che sono uguali; infatti: *lim sup A_n = (a,b]* e *lim inf A_n = (a,b]* ; per cui *lim sup A_n = lim inf A_n*. SI veda la rappresentazione grafica seguente.



Bibliografia: Giorgio Dall'Aglio, Calcolo delle probabilità, Zanichelli, Bologna, 1991 – Luciano Daboni, Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica, UTET, Torino, 1980



L'Arbelo di Archimede

Il suo nome, in greco, significa trincetto da calzolaio. Una caratteristica dell'Arbelo è che la lunghezza della semicirconferenza massima è uguale alla somma delle lunghezze delle due semicirconferenze minori.

Bibliografia: Luciano Cresci, «Le curve celebri», Muzzio ed., Padova, 1998

A proposito di "equazione diofantina" particolare

di Piero Plazzi *

Nella "lettera aperta" del prof. Arnaldo Vicentini [foglio n. 16] c'è un appello a cui credo di poter rispondere, almeno parzialmente. La equazione x^2-y^3=k è nota come equazione di Bachet, e su di essa c'è una vasta letteratura: del resto, è assai difficile da studiare in generale, e solo nel nostro secolo Mordell ha provato la congettura che essa abbia per ogni intero k soltanto un numero finito di soluzioni, mentre Baker (anno 1966) ha trovato un algoritmo per il computo. Queste ed altre informazioni si possono trovare in *Adams-Goldstein, Introduction to Number Theory, Prentice Hall 1976*: un ottimo testo, che usa l'equazione di Bachet come filo rosso per l'esposizione, provandone anche alcuni casi particolari (k=23, 45) con tecniche abbastanza elementari, mentre altri casi richiedono strumenti decisamente più impegnativi, pure ivi esposti. Non sono un esperto di teoria dei numeri, tuttavia mi riprometto di rispondere all'appello in maniera più appropriata in un prossimo articolo su queste pagine.

** Piero Plazzi è presidente della sezione emiliana della Mathesis, e professore ordinario di Matematica Generale presso la Facoltà di Economia dell'Università degli Studi di Bologna.*

La distribuzione normale come limite della binomiale

di Arnaldo Vicentini

Come sarà venuta in mente a Gauss la distribuzione normale g(x)=Exp[-x^2/2·σ^2]/(σ·√(2·π)) ? Lanciamo 2·n monete e diciamo T il numero di teste che esce. La probabilità di fare r teste in più o in meno rispetto al numero atteso n è:

$$p_{\pm r} = P[T = n \pm r] = \binom{2\cdot n}{n \pm r} \Big/ 2^{2\cdot n} = \frac{1}{2^{2\cdot n}} \cdot \frac{(2\cdot n)!}{(n-r)!\,(n+r)!}$$

I momenti m_0, m_1, m_2 e la varianza σ^2 sono:

$$m_0 = p_0 \sum_{r=-n}^{n} \frac{p_r}{p_0} = \frac{(2\cdot n)!}{2^{2\cdot n}(n!)^2} \sum_{r=-n}^{n} \frac{n!/(n-r)!}{(n+r)!/n!} = 1\ ; \tag{1}$$

$$m_1 = \mu = p_0 \sum_{r=-n}^{n} r \cdot \frac{p_r}{p_0} = p_0 \sum_{r=1}^{n} \frac{r \cdot p_r - r \cdot p_{-r}}{p_0} = 0\ ; \tag{2}$$

$$m_2 = \sigma^2 + \mu^2 = \sigma^2 = \frac{1}{2^{2\cdot n}} \sum_{k=1}^{n} (k-n)^n \cdot \frac{(2\cdot n)!}{(2\cdot n - k)!\,k!} = \frac{n}{2} \tag{3}$$

Dalla (1) otteniamo:

$$\frac{(2\cdot n)!}{2^{2\cdot n}\cdot (n!)^2} \cdot \sum_{r=-n}^{n} \left[\prod_{s=0}^{r-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right) \right] \Big/ \left[\prod_{s=1}^{r} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \right] = 1 \tag{4}$$

Se facciamo tendere n all'infinito, possiamo sostituire (1 ± s/n) con Exp[± s/n]. Notiamo che 1+2+…+k = k· (k+1)/2. Dalla (4) abbiamo allora:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2\cdot n)!}{2^{2\cdot n}\cdot (n!)^2} \cdot \sum_{r=-n}^{n} \frac{Exp\left(-\frac{r\cdot(r-1)}{2\cdot n}\right)}{Exp\left(\frac{r\cdot(r+1)}{2\cdot n}\right)} = 1 \tag{5}$$

ossia:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sqrt{n}\cdot(2\cdot n)!}{2^{2\cdot n}\cdot (n!)^2} \cdot \sum_{r=-n}^{n} Exp\left(-\frac{r^2}{n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = 1\ . \tag{6}$$

La (5) e la (6) ci dicono che, al crescere di n, la distribuzione p_r=[(2·n)!]/[2^{2n}·(n-r)!(n+r)!] approssima sempre meglio g_r=p_0· Exp(-r^2/n). Per la definizione stessa di integrale, nella (6) la sommatoria diventa

$$\int_{-\infty}^{\infty} Exp\left(-x^2\right) \cdot dx = \sqrt{\pi}\ .$$

Troviamo così anche il limite notevole:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n\cdot\pi}\cdot(2\cdot n)!}{2^{2\cdot n}\cdot(n!)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{2^{2\cdot n}\cdot (n!)^2}{(2\cdot n)!} \right]^2 = \pi\ . \tag{7}$$

Osservando nella (6) che, in base a (3), n=2σ^2 e tenendo conto della (7), possiamo anche scrivere:

$$\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} Exp\left[-x^2/\left(2\cdot\sigma^2\right)\right] \cdot dx = 1\ . \tag{8}$$

Trovando così che la distribuzione normale è il limite della binomiale per n → ∞ con l'accorgimento di compattare l'stogramma senza variarne l'area dilatando le ordinate col fattore √n e contraendo le ascisse col fattore reciproco 1/ √n.