ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 173 – Pubblicato il 8 – 11 – 2012

On Bézier and Subdivision Curves

Len Bos [*]

[*Continued from number* 172]

3 Subdivision Curves

We have seen the benefit of repeating a good thing. But in Mathematics there is another rule: a good thing should not only be repeated but also *abstracted*, i.e., generalized. The rule (7) we found for the control points of piecewise quadratic curves is just a rule for generating new control points from old ones. Here the coeficients a_k are given by the 2-scale relation for $Q_0(t)$, (6), but we could consider using other coeficients. Here's just one example called the 4-point scheme of Dubuc:

$$\mathbf{d}_{2i}^{(j+1)} = \mathbf{d}_i^{j}$$

$$\mathbf{d}_{2i+1}^{(j+1)} = a\mathbf{d}_{i-1}^{(j)} + \left(\frac{1}{2} - a\right)\mathbf{d}_i^{(j)} + \left(\frac{1}{2} - a\right)\mathbf{d}_{i+1}^{(j)} + a\mathbf{d}_{i+2}^{(j)}.$$

Here a is a parameter to be chosen.
In Figure 7 we show what happens with a = –1/16, a = –1/8 and a = 1/4: The behaviour is quite different for different values of the parameter, even exotic! If you can, try different values of a yourself! There is a theory that explains how smooth the curve that results from a refinement as in (7) actually is, but this is beyond the scope of this article. If you're really interested you might look at the book [2].
We end this section with another example:

$$\mathbf{d}_{2i}^{(j+1)} = \frac{1}{8}\mathbf{d}_{i-1}^{(j)} + \frac{6}{8}\mathbf{d}_i^{(j)} + \frac{1}{8}\mathbf{d}_{i+1}^{(j)}$$

$$\mathbf{d}_{2i+1}^{(j+1)} = \frac{1}{2}\mathbf{d}_i^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}_{1+1}^{(j)} \qquad (9)$$

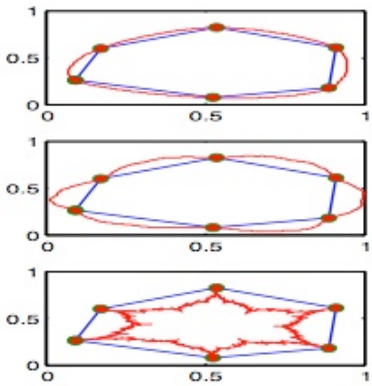

Figure 7: Dubuc for a = –1 / 16, –1 / 8, 1 / 4, respectively

We leave it to the reader to try this out – it will result in a curve that is piecewise cubic and have two continuous derivatives, so even smoother looking than the piecewise quadratic curves!

4 Surfaces

Of course it's much more interesting to draw surfaces; indeed the famous animated movies Toy Story, Shrek etc. are all created by the techniques we have benn describing, except generalized to surfaces. Here we will just indicate some of the possibilities – the details would require another (longer) article! We can easily make what are called Bézier *patches* by beginning with an array of contro points $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbf{R}^3$ and creating a segment of a surface, in analogy with (3),

$$\mathbf{b}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{i,j} B_i^n(t_1) B_j^n(t_2)$$

for $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$. Again, $B_j^n(t)$ is the Bernstein polynomial whose formula we gave just after (3). These patches can be "sewed together" exactly like one makes a quilt to get a nearly arbitrary surface. Figure 8 shows an example of this (taken from the Wikipedia).

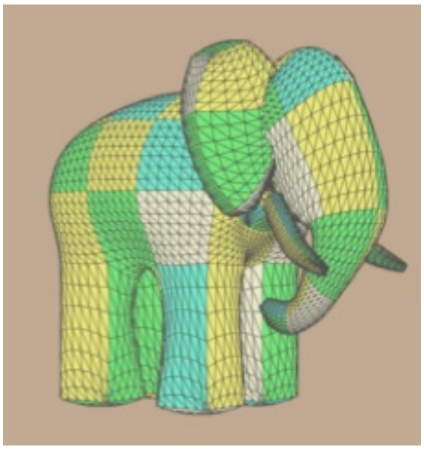

Figure 8: Gumbo by E. Catmull

A very popular scheme, also based on square meshes, is the so-called Catmull-Clark subdivision, which is a bivariate generalization of the scheme given in (9). Here you start with a *rectangular* mesh tht gives a rough description of the surface and then generate a finer mesh using simple combinations of the old mesh points. Figure 9 shows an example of a surface generated by this scheme. Perhaps you recognize it! For more about this you might begin with the Wikipedia article on this scheme.

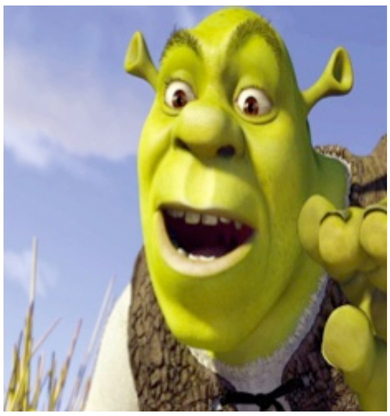

Figure 9: Someone you should know

Finally, in Figure 10, we give an example of the so-called Butterfly Scheme which is based on starting with a *triangular* mesh (We used the Matlab Numerical Tour Toolbox provide by G. Peyre' [3] to generate this figure). Again, the idea is the same – starting with a rough (triangular) mesh, you generate finer and finer meshes by means of simpe formulas that eventually converge to a desired surface.

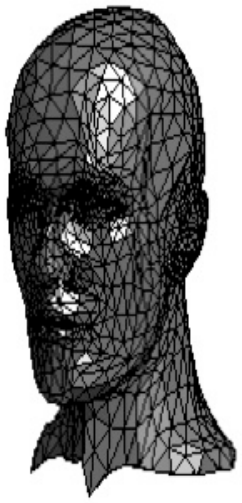

Figure 10: Produced Using the Butterfly Scheme

5 Conclusions

We hope that we've given enough details here to give a good idea of what these schemes are all about. There's lots left to understand and explore. Enjoy!

References: [1] G. Farin. *Curves and Surfaces for CAGD, a Practical Guide*, Fourth Edition, Morgan-Kauffman, 1966. [2] M. Sabin. *Analysis and Design of Univariate Subdivision Schemes*, Springer, 2010. [3] Numerical Tour Toolbox, http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour/

[*] Professore Ordinario di Analisi Numerica, Università degli Studi di Verona. E-mail: leonardpeter.bos@univr.it

TEOREMA SU UN TEST DI PRIMALITÀ CON FATTORIZZAZIONE

Guido Carolla [**]

Sunto: *Rifacendoci all'articolo pubblicato nel numero di aprile della rivista «MatematicaMente» (numero 167), per il quale avevamo tratto spunto da alcuni noti binomi per la costruzione di un diagramma di Eulero-Venn, ora si perviene, mediante un algoritmo, alla dimostrazione di un nuovo teorema, con un originale test di primalità e conseguente fattorizzazione.*

Premessa

Allo scopo di rendere più scorrevole il discorso che segue diciamo che i binomi $6n \pm 1$ generano, al variare di n negli interi positivi, tutti i numeri dispari maggiori di 1, eccetto i multipli di 3. In particolare

$$6n \pm 1 : \begin{cases} 7,13,19,25,31,37,43,... & con + \\ 5,11,17,23,29,35,41,... & con - \end{cases}$$

La precedente osservazione costituisce il punto chiave del teorema. Sia, infatti, D un intero dispari. Si presentano i seguenti casi:

1) *D non è multiplo di 3 e non è primo*. Allora sia D sia ogni suo divisore non banale si trovano in una delle due liste generate dai binomi $6n \pm 1$. Ciò significa che insieme le due equazioni indeterminate $d \cdot (6n \pm 1) = D$ hanno per soluzioni la coppia $d = 1$, n opportuno, e anche almeno due coppie con $d > 1$ ed n opportuno. Si tratta della tesi [1a] del teorema.

2) *D è multiplo di 3 e non potenza di 3*. Allora almeno uno dei divisori di D appartiene a una delle due liste. Ciò significa che insieme le equazioni $d \cdot (6n \pm 1) = D$ hanno per soluzioni almeno una coppia con $d > 1$ ed n opportuno. Si tratta della tesi [1b].

3) *D è una potenza di 3*. Allora nessun divisore di D può appartenere a una delle due liste e ciò significa che insieme le equazioni $d \cdot (6n \pm 1) = D$ non hanno soluzioni.

4) *D è primo*. Allora D appartiene a una delle due liste e insieme, le equazioni $d \cdot (6n \pm 1) = D$ hanno una sola soluzione $d = 1$ ed n opportuno (infatti D non ha divisori non banali!). Si tratta della tesi [2].

Il test di primalità proposto, per decidere la natura di D, in definitiva prevede la risoluzione delle due equazioni $d \cdot (6n + 1) = D$ e $d \cdot (6n - 1) = D$.

Tre ultime osservazioni, prima di esporre il teorema e la dimostrazione: se escludiamo i multipli di 3 (basta un semplice test iniziale), tra gli eventuali divisori del numero D da controllare, si possono considerare solo i binomi $6n \pm 1$ che non superino $\sqrt{D}$, ciò porterebbe a un piccolo vantaggio computazionale rispetto all'algoritmo classico adottato nel primo listato di programma riportato al termine dell'articolo; con il secondo listato, facendo progredire d di 2 in 2 fino a $\sqrt{D}$, abbiamo ridotto i tempi di esecuzione per riconoscere la natura di D, però con minore validità della fattorizzazione; col primo listato, la possibilità di ottenere facilmente la fattorizzazione in numeri primi di D è più agevole se essi presentano esponenti 1, un po' meno agevole, ma sempre valida, è qualora i primi abbiano esponenti maggiori di 1.

TEOREMA: «Particolari soluzioni delle due equazioni indeterminate $d + 6 \cdot d \cdot n = D$ e $-d + 6 \cdot d \cdot n = D$, nelle due incognite d ed n con D assegnato, dove d e D sono dispari positivi e n intero positivo, permettono di sapere se il numero D è composto o primo:

[1a] se si hanno almeno due coppie delle soluzioni $d \geq 1$, $n \geq 1$, una delle quali è $d = 1$, $n \geq 1$, il numero D è composto non multiplo di tre; [1b] se si hanno una o più coppie di soluzioni $d > 1$, $n \geq 1$, il numero D non potenza di 3 è multiplo di 3; [1c] se non si ha alcuna coppia di soluzioni d, n, il numero D è una potenza di 3;

[2] se si ha una sola coppia di soluzioni $d = 1$, $n \geq 1$, allora D è un numero primo».

Dimostrazione: Considerate le due equazioni indeterminate $\pm d + 6 \cdot d \cdot n = D$, al primo membro si scambino i termini e si raccolga a fattore comune d, per cui si ha $d \cdot (6 \cdot n \pm 1) = D$. La scomposizione di $6 = 2 \cdot 3$, seguito da ± 1, assicura che i due binomi $6 \cdot n \pm 1$ possano dare tutti i numeri dispari non multipli di 3, composti o primi, per cui si può scrivere $6 \cdot n \pm 1 = c$, $6 \cdot n \pm 1 = p$. Si considerino singolarmente i prodotti di $d > 1$ per c e per p, per cui si hanno

$$(d > 1) \cdot c = c_1 \,, \qquad (1)$$
$$(d > 1) \cdot p = c_2 \qquad (2)$$

con c_1 e c_2 entrambi dispari composti. Si considerino singolarmente i prodotti di $d = 1$ per c e per p, per cui si hanno

$$(d = 1) \cdot c = c \,, \qquad (3)$$
$$(d = 1) \cdot p = p. \qquad (4)$$

Per la (3) possiamo anche avere

$$(d = 1) \cdot c_1 = c_1, \qquad (5)$$

per cui uguagliando i primi membri della (1) e della (5), si ha: $(d > 1) \cdot c = (d = 1) \cdot c_1$, che dà proprio la (1) e ciò prova che, al verificarsi contemporaneo di $(d > 1) \cdot c$ e $(d = 1) \cdot c_1$, il c_1 debba essere un numero dispari composto. In definitiva, sostituendo di nuovo i valori di $c_1 = 6 \cdot n \pm 1$ e di $c = 6 \cdot n \pm 1$ si dovranno avere congiuntamente, con n che assume valori diversi, $(d{=}1) \cdot (6 \cdot n \pm 1) = D$ e $(d > 1) \cdot (6 \cdot n \pm 1) = D$, che denotano D numero dispari composto e ciò prova il punto [1a] dell'enunciato del teorema.

[*Segue nel numero* 174]

[**] Docente ordinario di Matematica di Lecce e Dirigente scolastico in ogni ordine di scuola, ora a riposo. E-mail: guidocarolla@libero.it