ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 176 – Pubblicato il 12 – 02– 2013

HUMAN DEVELOPMENT INDEX

di Luciano Corso

Introduzione

Per valutare la qualità della vita dei popoli della terra, si sono escogitati numerosi indici, ciascuno dei quali può essere visto come un tentativo di trovare una misura in grado di confrontare, a parità di condizioni, i diversi tenori di vita e di sviluppo dei popoli. La nascita di questi indici segue una linea di azione che risulta comune a tante discipline statistiche. L'idea portante è che per trovare una misura di comparazione tra grandezze diverse, è necessario che tale misura sia elastica, normalizzata e regga al contorno. Negli ultimi 20 anni ho assistito alla proposta di diversi indici sulla qualità della vita (si veda MatematicaMente n. 64 – febbraio 2003) tutti con aspetti positivi e negativi. Anche quelli più recenti sono alquanto lacunosi perché non tengono conto della qualità ambientale che dipende sempre strettamente dall'impatto umano sul territorio. Potremmo dire che essi tengono conto solo del benessere attuale, ma non considerano l'evoluzione futura del benessere sociale. L'impatto umano può essere misurato in modo generale dalla densità di popolamento, cioè dal numero medio d'individui per unità di superficie. C'è anche un'altra variabile che andrebbe presa in considerazione: il tasso di dispersione edilizia; al suo aumentare, aumenta la valutazione negativa dello stato dell'ambiente perché ha la conseguenza di ridurre la biodiversità del territorio (molte specie biologiche non sopportano la presenza dell'uomo e, viceversa, l'uomo non può sopportare la presenza di numerose specie biologiche). Inoltre, il prodotto interno lordo (PIL) pro-capite normalizzato è, oggi, una misura della capacità di consumo di un individuo e quindi esso è considerato un indicatore positivo della qualità della vita (al suo aumentare, aumenta la libertà di un individuo di spendere e viceversa al suo diminuire), ma – sotto l'aspetto dell'impatto sull'ecosistema – avrebbe un significato negativo (al suo aumentare si riduce la qualità ambientale - intesa come diminuzione delle risorse disponibili - e viceversa). Quindi, si dovrebbe depurare il PIL pro-capite dalla quota di consumo che identifica uno spreco di risorse e un danno per l'ambiente e per l'uomo. Il problema di questa contrapposta valutazione non è stato ancora risolto perché vede due posizioni nettamente diverse tra due scuole econometriche: quella classica e quella bioeconomica. Proporrò, poi, un HDI che terrà conto anche di questi tre indici, che vanno usati con molta cautela.

1. Indice di sviluppo umano come media aritmetica

Fino a qualche anno fa, l'*HDI* (acronimo che useremo in seguito per *Human Development Index*) veniva calcolato come media aritmetica ponderata dei seguenti tre indici:

x_1 = indice della vita media alla nascita (o della speranza di vita alla nascita o, ancora di aspettativa di vita) di un paese;

x_2 = indice di istruzione o di conoscenza;

x_3 = indice di PIL pro-capite.

Il primo indice si calcola a partire dalla vita media alla nascita, espressa in anni. Se X_1 è la vita media di un certo paese, per il calcolo di x_1 si considera il seguente rapporto:

$$x_{1k} = \frac{X_{1k} - Min\left[X_{1k}\right]}{Max\left[X_{1k}\right] - Min\left[X_{1k}\right]} \quad \forall\, k \qquad (1)$$

dove k identifica il paese, $Min[X_{1k}]$ è la vita media più bassa riscontrata sperimentalmente o presa per convenzione, $Max[X_{1k}]$ è la vita media più alta riscontrata sperimentalmente o presa per convenzione. Fino a poco tempo fa, l'indice veniva calcolato nell'intervallo di vita media [25*anni*, 85*anni*] per cui $Min[X_{1k}]$=25*anni* e $Max[X_{1k}]$ = 85*anni*. L'indagine va estesa a tutti i paesi del mondo.

Il secondo indice, x_2, è calcolato come media aritmetica ponderata di due indici, $x_2(R)$ e $x_2(A)$: il primo è l'indice medio d'istruzione prevista sulla base delle iscrizioni scolastiche avvenute nell'arco di tempo massimo di istruzione regolare del paese (concordato in 18 anni di scuola; per l'Italia, per esempio, si parte dai 6 anni e si arriva a 23 anni, con laurea magistrale) e il secondo è l'indice medio di anni d'istruzione effettivi raggiunti dagli adulti (calcolato dopo i 25 anni di età); quest'ultimo, in sostanza, è un indice di alfabetizzazione degli adulti. Entrambi i valori sono determinati sulla base di serie storiche. I 2 indici si ottengono nel modo seguente:

$$x_{2k}(R) = \frac{X_{2k}(R) - Min[X_{2k}(R)]}{Max[X_{2k}(R)] - Min[X_{2k}(R)]} \qquad \forall k\ , \qquad (2)$$

$$x_{2k}(A) = \frac{X_{2k}(A) - Min[X_{2k}(A)]}{Max[X_{2k}(A)] - Min[X_{2k}(A)]} \qquad \forall k\ , \qquad (3)$$

dove $X_{2k}(R)$ è il numero medio di anni di studio regolari previsti e $X_{2k}(A)$ sono gli anni effettivamente studiati da chi è adulto (calcolati dopo i 25 anni di età); $Min[X_{2k}(R)]$ e $Min[X_{2k}(A)]$ sono i minimi e $Max[X_{2k}(R)]$ e $Max[X_{2k}(A)]$ i massimi di queste due variabili, relativi al paese k. L'indice x_2 è la media aritmetica ponderata di questi due indici; cioè:

$$x_{2k} = x_{2k}(R)\cdot w_2(R) + x_{2k}(A)\cdot w_2(A) \quad \forall k\ . \qquad (4)$$

dove $\sum w_{2k}(j)=1$, con $j=R,\ A$. Sono stati attribuiti i pesi $w_2(R) = 1/3$ e $w_2(A) = 2/3$ per la ragione che si è ritenuto di dare più peso al tasso di alfabetizzazione di un paese rispetto al tasso di istruzione regolare prevista.

Il terzo indice è, nelle intenzioni, una misura del grado di benessere generale di un individuo calcolato partendo dal prodotto interno lordo pro-capite (reddito lordo pro-capite o, anche, consumi pro-capite).

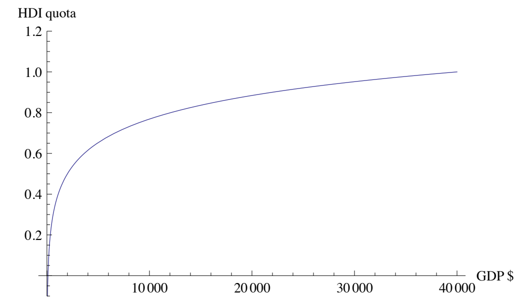

Fig. 1. Andamento di x_{3k}=*HDI quota*. Si nota che, a parità d'incrementi di reddito procapite, corrisponde un incremento in scala logaritmica della quota di HDI, com'è sperimentalmente riscontrabile [B.1].

In questo caso, però, si procede alla costruzione dell'indice partendo dai valori osservati e facendo una trasformazione logaritmica sugli stessi per rispettare l'idea che, a parità di condizioni, un incremento dei consumi a livelli bassi di reddito porta un aumento del benessere generale maggiore di quello che si potrebbe verificare se lo stesso incremento accadesse a livelli di reddito maggiori. Il grafico di Fig, 1 evidenzia la ragione.

L'indice perciò si calcola nel modo seguente:

$$x_{3k} = \frac{Ln(X_{3k}) - Min\left[Ln(X_{3k})\right]}{Max\left[Ln(X_{3k})\right] - Min\left[Ln(X_{3k})\right]} \qquad \forall k\,, \qquad (5)$$

dove X_{3k} è il prodotto interno lordo medio pro-capite del paese k.

A questo punto si decide di fare la media aritmetica ponderata di questi tre indici e si ottiene così

$$HDI(k) = x_{1k}\cdot w_1 + x_{2k}\cdot w_2 + x_{3k}\cdot w_3 \qquad (6)$$

dove $\sum w_i = 1$ e, attualmente, $w_i = 1/3$.

2. Indice di sviluppo umano come media geometrica

Recentemente è stato proposto un nuovo indice che si basa sulle stesse grandezze indicizzate viste sopra, ma in questo caso l'$HDI(k)$ diventa la media geometrica degli indici sopra visti. Vediamo come. La (1), (2) e (3) rimangono così. La (4), posto $w_2(R) = w_2(A) = 1/2$ diventa

$$x_{2k} = \left[x_{2k}(R)\right]^{w_2(R)}\cdot\left[x_{2k}(A)\right]^{w_2(A)} \qquad \forall k\,, \qquad (7)$$

che è la media geometrica ponderata di $x_{2k}(R)$ e $x_{2k}(A)$.

La (5) rimane invariata. La (6) cambia. In questo caso l'HDI diventa:

$$HDI(k) = \left[x_{1k}^{w_1}\cdot x_{2k}^{w_2}\cdot x_{3k}^{w_3}\right] \qquad \forall k\,. \qquad (8)$$

Nella (8), come nella (6), in via puramente teorica, i pesi possono avere un valore qualsiasi. In realtà, però, essi, nelle statistiche internazionali, sono posti $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$.

[*Segue nel n.* 177]

Lo sviluppo di questi indici è dovuto ai lavori del seguente gruppo di economisti: Mahbub ul Haq, Paul Streeten, Frances Stewart, Gustav Ranis, Keith Griffin, Sudhir Anand, Maghnad Desai, Amartya Sen

NUMERI DI STIRLING DI PRIMA SPECIE

Relazione esistente tra i numeri appartenenti ad una colonna

di Gabriele Pupolin [**]

[*Segue dal numero* 175]

4. Conclusioni

L'espressione

$$s(m+2,k) = \sum_{j=0}^{m} \frac{p(m,j)\cdot s(j+1,k)}{m+2-k}$$

rappresenta il prodotto della riga m della Matrice **P** per una delle colonne k della Matrice dei Numeri di Stirling di Prima Specie senza segno tra i valori 1 e $(m+1)$ (da ricordare che $m+1 = n-1$), provvedendo poi a dividere il risultato per $(m+2-k)$ (corrispondente a $n-k$).

Il prodotto della riga m della Matrice **P** per le k colonne della Matrice dei Numeri di Stirling senza segno, come sopra indicato, genera tutti i Numeri di Stirling di Prima Specie senza segno della successiva riga $(m+2)$ (corrispondente a n), eccetto il caso $s(m+2, m+2)$. Il valore di $s(m+2, m+2)$ (corrispondente a $s(n, n) = 1$) è sempre 1.

La riga j della Matrice **P** può esser costruita a se stante in maniera semplice in base alla formula

$$p(m,j) = (m-j)!\cdot\binom{m+2}{j}.$$

Pertanto: noti i valori di una colonna k dei Numeri di Stirling sino alla riga $(m+1)$, con un programma che esegua la moltiplicazione tra due vettori e la successiva divisione del risultato per $(m+2-k)$ è possibile generare, in successione, tutti i Numeri di Stirling appartenenti alla stessa colonna k.

Tabella 3: Matrice P

(m) \ (j)	0	1	2	3	4	5	6
0	1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	1	3	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	2	4	6	*0*	*0*	*0*	*0*
3	6	10	10	10	*0*	*0*	*0*
4	24	36	30	20	15	*0*	*0*
5	120	168	126	70	35	21	*0*
6	720	960	672	336	140	56	28

Tabella 4: Matrice Numeri di Stirling senza segno

(n) \ (k)	0	1	2	3	4	5	6
0	1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	0	1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	0	1	1	*0*	*0*	*0*	*0*
3	0	2	3	1	*0*	*0*	*0*
4	0	6	11	6	1	*0*	*0*
5	0	24	50	35	10	1	*0*
6	0	120	274	225	85	15	1

$$\frac{0\cdot 24 + 0\cdot 36 + 1\cdot 30 + 6\cdot 20 + 35\cdot 15}{6-3} = 225$$

Riferimenti bibliografici:

[B.1] ABRAMOWITZ M., STEGUN I. *Handbook of Mathematical Functions*

[**] Socio nazionale Mathesis - Preside CIFI (Collegio Ingegneri Ferroviari Italiani) – Venezia – e-mail: g.pupolin@tin.it

Questo lavoro è stato presentato al Congresso nazionale della Mathesis, tenutosi a Rovigo dal 18 al 20 ottobre 2012.