ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 177 – Pubblicato il 20 – 03 – 2013

HUMAN DEVELOPMENT INDEX

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 176]

3. Osservazioni ed esempi

La prima osservazione è che la (6) e la (9) hanno un orientamento profondamente diverso. Applicando la (6) nei casi limite, infatti, si ottiene che l'indice medio, $HDI(k)$, è diverso da zero anche se si azzera uno o due x_{ik}. Cioè, l'indice di sviluppo umano può essere diverso da zero anche se 2 dei 3 indicatori x_{ik} (la speranza di vita alla nascita, grado d'istruzione, PIL pro-capite) sono uguali a zero. Ciò non accade, invece se l'$HDI(k)$ si calcola con la (9). In tal caso, basta che uno degli x_{ik} sia uguale a zero perché l'indice medio sia uguale a zero. Inoltre, i tre indici non sono indipendenti tra di loro. Recentemente si è optato, per queste ragioni, per una media geometrica ponderata dei tre x_{ik}. In sostanza, l'ONU ritiene che, perché ci sia sviluppo in un paese, occorre che tutti e tre gli x_{ik} siano diversi da zero.

La seconda osservazione riguarda la scelta dei valori $Max(X_{ik})$ e $Min(X_{ik})$ per ogni i. Si osservano due percorsi diversi: il primo attribuisce agli X_{ik} valori massimi e minimi convenzionali e ragionevoli; il secondo fa riferimento a valori estremi effettivamente sperimentati a livello globale. I due percorsi danno risultati di poco diversi, ma è bene tenerne conto. Nella tabella 1 si possono osservare le differenze dei valori degli estremi delle tre variabili.

Tabella 1

	Valori estremi delle variabili dell'HDI (unità di misura omesse)			
	X_1	$X_2(R)$	$X_2(A)$	X_3
Convenz.	[25, 85]	[0, 18]	[0, 15]	[100, 40 000]
Speriment.	[20, 83.4]	[0, 18]	[0, 13.6]	[100, 107 721]

Gli estremi sperimentali si ottengono andando a investigare nei vari Stati del mondo i diversi valori calcolati dalle statistiche ufficiali e prendendo alla fine i valori più piccoli e quelli più grandi. Per esempio, per il 2011, il paese che ebbe la speranza di vita alla nascita più alta è il Giappone con un valore pari a 83.4*anni*; il paese che ebbe la speranza di vita alla nascita più bassa è il Togo con un valore pari a 20*anni*; il paese che ebbe il grado d'istruzione previsto più lungo è la Norvegia con un valore pari a 18*anni* e il paese con il grado d'istruzione effettivo per adulti più lungo sono gli USA con un valore pari a 13.6*anni*; il paese che ebbe il PIL pro capite più alto è il Qatar con un valore pari a 107 721$ e quello che lo ebbe più basso è il Gabon con un valore pari a 100$. I valori convenzionali si sono scelti sulla base dei dati sperimentali con varie sistemazioni (arrotondamenti) che dipendono da ciò che si può prevedere nel breve periodo o da un accordo ragionevole.

La terza considerazione riguarda gli anni d'istruzione scolastica. Qui, non tutti sono d'accordo di considerare l'arco temporale totale offerto da uno Stato per lo studio di un giovane. Alcuni escludono il dottorato di ricerca, altri l'intero periodo universitario; rispettivamente gli anni diventerebbero 18 e 13, mentre con il dottorato, in numerosi paesi salirebbero a 20 (compresa l'Italia). Attualmente, è passata la tesi che considera, come periodo di formazione regolare, quello che va da 0 a 18 anni. Si esclude, quindi, il periodo di formazione del dottorato di ricerca. Il periodo d'istruzione degli adulti è l'arco di tempo che, a partire dai 25 anni di età, un adulto ha effettivamente passato sui banchi di scuola. Il calcolo del numero medio di anni di studi effettivi è fatto su base statistica. Negli USA il calcolo ha portato al valore di 13.6 anni. Questo valore è considerato, attualmente, il massimo possibile e quindi determina il $Max[X_2(A)]$. Per quanto concerne i pesi da attribuire a $X_2(R)$ e $X_2(A)$, si è deciso, nel caso additivo (4), di assegnare maggior importanza alla variabile $X_2(A)$ e, perciò, si è dato peso 2/3 a $w_2(A)$ e peso 1/3 a $w_2(R)$ e, nel caso moltiplicativo (7), di assegnare ugual peso ad entrambe. Infine, nel calcolo sperimentale di (7), si è diviso il risultato per il valore massimo sperimentale osservato nel mondo (si veda (9)).

Con queste premesse e considerando l'instabilità del processo di calcolo (di anno in anno cambiano i punti di vista), calcoliamo ora, come esempio di applicazione degli indici presentati, l'HDI dell'Italia.

Italia (k=1), anno 2011

- Indice di speranza di vita alla nascita:

X_{11}=81.9 anni, Min(X_{11})=20 anni(Gabon), Max(X_{11})=83.4 anni(Japan)

$$x_{11}=\frac{X_{11}-Min[X_{11}]}{Max[X_{11}]-Min[X_{11}]}=\frac{81.9-20}{83.4-20}\cong 0.976\ .$$

- Indice d'istruzione pubblica:

$X_{21}(A)$=10.1 anni,

Min($X_{21}(A)$)=0 anni, Max($X_{21}(A)$)=13.1 anni (USA)

$X_{21}(R)$=16.3 anni,

Min[$X_{21}(R)$]=0 anni, Max[$X_{21}(R)$]=18 anni (convenzionale)

$$x_{21}(A)=\frac{X_{21}(A)-Min\left[X_{21}(A)\right]}{Max\left[X_{21}(A)\right]-Min\left[X_{21}(A)\right]}=\frac{10.1-0}{13.1-0}\cong 0.771$$

$$x_{21}(R)=\frac{X_{21}(R)-Min\left[X_{21}(R)\right]}{Max\left[X_{21}(R)\right]-Min\left[X_{21}(R)\right]}=\frac{16.3-0}{18-0}\cong 0.905$$

$$x_{21}=\sqrt{x_{21}(A)\cdot x_{21}(R)}\cong 0.835$$

$$x_{21}^{*}=\frac{x_{21}}{Max[x_{21}]}=\frac{0.835}{0.978(New\ Zeland)}\cong 0.854\ . \qquad (9)$$

- indice di PIL pro capite:

X_{31}=26 484$,

Min[X_{31}]= 100$, Max[$X_{31}$]=107 721$ (Qatar).

$$x_{31}=\frac{Ln(X_{31})-Min[Ln(X_{31})}{Max\left[Ln(X_{31})\right]-Min\left[Ln(X_{31})\right]}=$$

$$=\frac{Ln(26\,484)-Ln(100)}{Ln(107\,721)-Ln(100)}\cong 0.799.$$

Quindi dalla (8) si ottiene:

$$HDI(k=1)=\sqrt[3]{0.976\cdot 0.854\cdot 0.799}\cong 0.873\ .$$

Questo è quanto risulta anche dalle statistiche ufficiali con un arrotondamento per eccesso a 0.874. L'Italia si colloca al 24-esimo posto della graduatoria internazionale. Il risultato si basa su ipotesi più o meno condivisibili la più importante delle quali è che sussista l'omogeneità dei dati al variare del tempo d'indagine.

4. Indice di sviluppo umano con parametri eco-sistemici

L'impatto dell'uomo sul territorio è ormai forte. Ogni uomo consuma molto e gli uomini sono tanti. Si possono quindi considerare tre nuovi indici che contribuiscono a misurare la qualità della vita degli uomini anche sotto l'aspetto dinamico (delle generazioni future). I tre indici sono un'elaborazione delle seguenti tre variabili: X_{4k}= densità di popolazione; X_{5k}= rifiuti pro capite; X_{6k}= dispersione umana. X_{4k} è una funzione che ha normalmente un andamento che può essere ben rappresentato da vari modelli di crescita delle popolazioni [B.2]. X_{5k} descrive la produzione di rifiuti per l'uso dei beni della Terra da parte di ogni uomo. Esso può essere misurato in unità di massa (chilogrammi o tonnellate, per esempio). Il prodotto $X_{4k}\cdot X_{5k}$ dà la produzione di rifiuti per unità di superficie degli abitanti di un certo ambiente. X_{6k} è una variabile di particolare importanza per verificare se sono rispettate le condizioni per la conservazione della biodiversità di un ambiente: più la dispersione umana è alta, meno è possibile conservare la biodiversità nel territorio. Data un'unità di superficie, per esempio 1 km^2, come si distribuiscono gli uomini in questo territorio? Procediamo per gradi.

La densità di popolazione, com'è noto, è data dal rapporto tra il numero di abitanti presenti nel territorio e la superficie dello stesso:

$$X_{4k} = \frac{Popolazione}{area}. \tag{10}$$

Per esempio, l'Italia ha circa 60 000 000 di abitanti e una superficie di 301 000 km^2. La sua densità di popolamento è quindi pari a

$$X_4 = 60\,000\,000ab\big/301\,000km^2 \cong 199.336\ ab/km^2 .$$

Dalla densità di popolazione si arriva all'indice di occupazione del territorio (densità di popolazione normalizzata). Per far ciò bisogna stabilire un valore massimo tollerabile di occupazione umana di un'unità di superficie - $Max[X_{4k}]$ - e quindi calcolare il rapporto X_{4k} / $Max[X_{4k}]$, che gioca un ruolo decisamente negativo sull'*HDI*, almeno a partire da un certo valore. Il suo complementare a 1, perciò, ha un ruolo positivo. Esso è:

$$x_{4k} = 1 - \frac{X_{4k}}{Max[X_{4k}]}. \tag{11}$$

(11) è l'indice di territorio libero disponibile e dà la disponibilità media di territorio pro capite. Occorre osservare, però, che se x_{4k} è troppo alto, si può avere un'eccessiva difficoltà organizzativa nella produzione di beni e servizi a causa della scarsa presenza di persone; se, peraltro, x_{4k} è troppo basso, per eccesso di popolazione, si verificano, come è noto, sindromi generali di adattamento; in questo secondo caso, si riscontrano nel territorio pericolose estinzioni di specie biologiche, esaurimenti di risorse primarie e riduzione della fertilità degli individui della specie. $Max[X_{4k}]$ (che corrisponde indicativamente alla capacità portante di un territorio) o va calcolato su base statistica, con una stima prospettica in un sistema di vincoli, o va definito per convenzione.

Il tasso di rifiuti pro capite si determina dividendo X_{5k} per il suo valore massimo: X_{5k} / $Max[X_{5k}]$. Anche questo indice ha una valenza peggiorativa sull'*HDI*. Il complementare a 1 ha valenza positiva. Esso è dato da:

$$x_{5k} = 1 - \frac{X_{5k}}{Max\left[X_{5k}\right]}. \tag{12}$$

(12) può essere definito come l'indice di consumo medio intelligente di una società. È facilmente determinabile perché X_{5k} corrisponde alla produzione media annua pro capite di rifiuti di un certo territorio e $Max[X_{5k}]$ è, su base sperimentale, la produzione media di rifiuti pro capite di quel paese al mondo che ne produce di più.

Infine, determiniamo il tasso di dispersione umana sul territorio. Innanzi tutto occorre determinare X_{6k}. Per far ciò abbiamo due possibilità: o calcoliamo la media delle distanze di ciascun manufatto (punto che definisce la presenza umana) dagli altri o calcoliamo la distanza media euclidea di ciascun manufatto da un punto medio (baricentro) del territorio [B.3]. Qui, scelgo la prima possibilità; si ha [si veda anche [B.7]):

$$\Delta(k) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\right|}{n\cdot(n-1)} = \frac{2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\right|}{n\cdot(n-1)} \quad \forall\, i \neq j \tag{13}$$

dove $\mathbf{P}_i$ e $\mathbf{P}_j$ sono le posizioni (punti), in coordinate piane, dei manufatti i e j, n è il numero di manufatti osservati, $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j|$ è la distanza euclidea dei due punti $\mathbf{P}_i$ e $\mathbf{P}_j$ e $\Delta(k) = X_{6k}$.

Il calcolo di (13) con estensione a tutto il territorio nazionale risulterebbe molto impegnativo; è possibile, tuttavia, arrivare a una stima di (13) su base campionaria. (13) va normalizzato dividendolo per il suo valore massimo. Questo valore si calcola in ipotesi di massima equidistribuzione nel territorio dei manufatti umani (che corrisponde alla massima distanza media dei punti tra di loro), prendendone un numero pari a quello censito. Se i Catasti dei vari Comuni italiani fossero aggiornati, sarebbe possibile arrivare, almeno su base campionaria, a una stima di $Max[X_{6k}]$ e, quindi, trovare l'indice X_{6k} / $Max[X_{6k}]$. Anche in questo caso, più alto è questo rapporto e peggiore è la qualità dell'ambiente; è necessario perciò calcolare il suo complementare a 1 per trovare l'indice desiderato:

$$x_{6k} = 1 - \frac{X_{6k}}{Max\left[X_{6k}\right]}. \tag{14}$$

Facciamo un esempio di calcolo delle (13) e (14) (Fig.1).

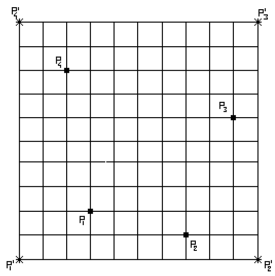

Fig. 1

Supponiamo che in uno spazio quadrato di $10\cdot km$ di lato ci siano quattro punti (manufatti) dislocati come è presentato in figura. Determiniamo (13) e (14). I punti hanno le seguenti coordinate:
P_1=(3, 2), P_2=(7, 1),
P_3=(9, 6) , P_4=(2, 8).
Calcoliamo le distanze tra i manufatti:

$$\left|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right| = \sqrt{17}\ km \quad , \quad \left|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3\right| = \sqrt{52}\ km \quad , \quad \left|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_4\right| = \sqrt{37}\ km ,$$

$$\left|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\right| = \sqrt{29}\ km \quad , \quad \left|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_4\right| = \sqrt{74}\ km \quad , \quad \left|\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\right| = \sqrt{53}\ km .$$

Calcoliamo (13):

$$\Delta(k) = \frac{2\cdot\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\right|}{n\cdot(n-1)} = \frac{2\cdot 38.0952km}{4\cdot(4-1)} \cong 6.34921km .$$

Questo, come scritto, è X_{6k}. Per determinare il suo valore massimo occorre ipotizzare che i quattro punti siano equamente distribuiti e massimamente lontani tra loro (stelline, in figura 1). Poniamo quindi i punti ai vertici del quadrato:
P'_1 = (0, 0), P'_2 = (10, 0), P'_3 = (10, 10), P'_4 = (0, 10).
Calcoliamo le distanze tra di loro:

$$\left|\mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_2\right| = \sqrt{100}\ km \quad , \quad \left|\mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_3\right| = \sqrt{200}\ km \quad , \quad \left|\mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_4\right| = \sqrt{100}\ km ,$$

$$\left|\mathbf{P}'_2\mathbf{P}'_3\right| = \sqrt{100}\ km \quad , \quad \left|\mathbf{P}'_2\mathbf{P}'_4\right| = \sqrt{200}\ km \quad , \quad \left|\mathbf{P}'_3\mathbf{P}'_4\right| = \sqrt{100}\ km .$$

Procedendo come sopra, si ottiene:

$$\Delta(k) = \frac{2\cdot\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\left|\mathbf{P}'_i\mathbf{P}'_j\right|}{n\cdot(n-1)} = \frac{2\cdot 68.2843km}{4\cdot(4-1)} \cong 11.3807km .$$

Il calcolo di x_{6k} è: $x_{6k} \cong 1 - (6.34921km/11.3807km) \cong 0.4421$.

A questo punto occorre studiare come inserire questi nuovi indicatori per il calcolo del nuovo *HDI*. Dando per buono il legame moltiplicativo degli x_{ik}, per ogni i, (per le ragioni scritte nel paragrafo 3) si arriva alla seguente relazione:

$$HDI^{*}(k) = \prod_{i=1}^{6} x_{ik}^{w_{ik}} \quad \forall k , \tag{15}$$

dove è stato messo un asterisco per distinguere questo indicatore da quello della formula (8) e w_{ik} sono i pesi ($\sum_i w_{ik}$ =1) da assegnare a ogni x_{ik}. HDI^* avrà un valore decisamente inferiore a quello oggi in uso, che risulta gonfiato solo perché non si considerano gli effetti negativi della crescita umana.

Bibliografia: [B.1] Wikipedia, the free encyclopedia, File HDI GDP percapitaPPP.png (2009). [B.2] Smith J. M., *L'ecologia e i suoi modelli*, ed. Mondadori biblioteca della Est, 1975, Milano . [B.3] L. Corso, *Misurare la dispersione edilizia*, MatematicaMente 147, 25-05-2010, Mathesis Verona. [B.4] Rapporto HDI sito http://hdr.undp.org/en/reports/. [B.5] Croci Angelici E., *Letture di economia dell'Unione Europea*, ed. B. Mondadori, 2012. [B.6] Campiglio E., *L'economia buona*, B. ed. Mondadori, 2012. [B.7] Piccolo D., Statistica, ed. Il Mulino, Bologna, 2000.