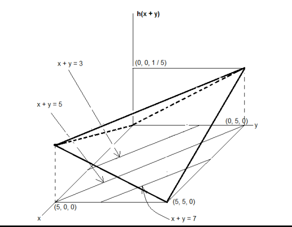
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 179 – Pubblicato il 24 – 05 – 2013



Osservazioni sulla convoluzione

di Luciano Corso

Consideriamo due variabili aleatorie X e Y definite rispettivamente dagli spazi di probabilità $\{\Omega_x, \Phi_x, P_x\}$ e $\{\Omega_y, \Phi_y, P_y\}$. Siano $A(x) = Prob(X \le x)$ e $B(y)=Prob(Y \le y)$ due distribuzioni di probabilità associate rispettivamente a X e a Y. Siano, inoltre, a_x e b_y rispettivamente le densità di probabilità associate a X e Y. Per convoluzione delle densità di probabilità di X e Y s'intende la funzione $c_{xy}(\tau)$ tale che:

$$c_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^{\tau} a_k \cdot b_{\tau-k} \quad , \quad \tau \in \mathbf{N} , \tag{1}$$

dove $x = k$ e $y = \tau - k$, nel discreto e

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \cdot b(\tau - x) \cdot dx \quad , \quad \tau \in \mathbf{R} , \tag{2}$$

dove $y = \tau - x$, nel continuo.
Per capire in che cosa consiste la convoluzione, consideriamo i seguenti due esempi.

Il primo si basa sul lancio di due dadi. Sulle facce appaiono delle cifre, che per noi diventano numeri. Siamo interessati alla studio delle due v.a.: X = "numero uscito nel lancio del dado 1"; Y = "numero uscito nel lancio del dado 2". Ciò che accade quando il dado 1 si ferma sul tavolo non dipende da quanto accade con il lancio del dado 2, né viceversa. Si dice, per questo, che le due variabili sono statisticamente indipendenti. Inoltre, la distribuzione di probabilità associata a ogni v.a. X e Y è, in questo caso, identica. Dal punto di vista probabilistico si usa una sigla per definire questa condizione: *i.i.d.*, acronimo di "indipendenti e identicamente distribuite". In sé, esse generano coppie con una distribuzione di probabilità uniforme. La tabella 1 presenta la situazione:

Tabella 1								
		Y						
		1	2	3	4	5	6	
X	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
	2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
		$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	1

Si tratta ora di vedere che succede se X e Y vengono poste in relazione tra loro. In generale, non possiamo sapere quale sarà la distribuzione di probabilità $H(W)$ associata alla nuova variabile $W=f(X,Y)$. In alcuni casi, però, sì. Per esempio, se $W = X + Y$, la distribuzione di probabilità associata a W è la cumulata della convoluzione delle probabilità associate alle singole due v.a., dove τ sono i valori assunti da W. La tabella 2 presenta le somme delle due v.a.:

Tabella 2							
		Y					
+		1	2	3	4	5	6
X	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

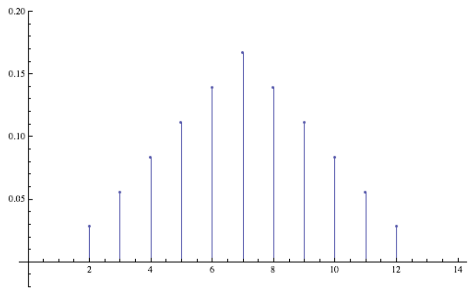


Fig. 1. La densità di probabilità discreta (o massa di probabilità) della v.a. $W = X + Y$

Tabella 3		
w	$c(w)$	$H(w)$
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36

Quindi, le probabilità associate alla v.a. w sono presentate nella tabel-la 3. Verifichiamo ora che la secon-da colonna della tabella dà proprio la convoluzione delle probabilità a_x e b_x. Infatti:

$$c(w=2) = \sum_{k=0}^{2} a_k \cdot b_{2-k} = a_0 b_2 + $$
$$+ a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{1}{36}$$

$$c(w=3) = \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot b_{3-k} = 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{2}{36}$$

...

$$c(w=7) = \sum_{k=0}^{7} a_k \cdot b_{7-k} = a_0 b_7 + \ldots + a_7 b_0 = 0 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 0 = \frac{6}{36}$$

...

$$c(w=12) = \sum_{k=0}^{12} a_k \cdot b_{12-k} = 0 \cdot 0 + \ldots + a_6 b_6 + \ldots + 0 \cdot 0 =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} .$$

Vediamo ora che cosa succede se, invece di fare la somma, facciamo il prodotto $Z = X \cdot Y$. La tabella 2 diventa la tabella 4 e la tabella 3 diventa la tabella 5:
Si può immediatamente vedere che in questo caso la convoluzione non funziona. Ma noi vogliamo verificarlo anche applicando la formula (1):

Tabella 4							
		Y					
	.	1	2	3	4	5	6
X	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36

Tabella 5		
z	h(z)	H(z)
1	1/36	1/36
2	2/36	3/36
3	2/36	5/36
4	3/36	8/36
5	2/36	10/36
6	4/36	14/36
8	2/36	16/36
9	1/36	17/36
10	2/36	19/36
12	4/36	23/36
15	2/36	25/36
16	1/36	26/36
18	2/36	28/36
20	2/36	30/36
24	2/36	32/36
25	1/36	33/36
30	2/36	35/36
36	1/36	36/36

$$c(z=1)=\sum_{k=0}^{1} a_k \cdot b_{1-k} =$$

$$= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot 0 = 0$$

$$c(z=2)=\sum_{k=0}^{2} a_k \cdot b_{2-k} = 0\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot 0=\frac{1}{36}\ , \ \ldots\ , \ c(z=12)=\sum_{k=0}^{12} a_k \cdot b_{12-k}=\frac{1}{36}\ , \ \ldots$$

Credo che basti. In sostanza la convoluzione di probabilità tra due v.a. funziona solo quando le due v.a. si legano tra di loro linearmente.

Facciamo ora un esempio nel continuo, dove vale la stessa regola. Consideriamo due v.a. X e Y con distribuzioni di probabilità uniformi, continue e indipendenti, entrambe definite nel dominio [0, 5] di $\mathbf{R}$:

$$X \in [0,5] \ \ con\ densità\ \ a(x)=\frac{1}{5} \ \ e\ distribuzione\ \ A(x)=\frac{x}{5}$$

$$Y \in [0,5] \ \ con\ densità\ \ b(y)=\frac{1}{5} \ \ e\ distribuzione\ \ B(y)=\frac{y}{5}\,.$$

Le coppie (X, Y) hanno una distribuzione di probabilità uniforme continua la cui densità è rappresentata dal grafico di figura 2. $h(X, Y)$ è la densità di probabilità congiunta di x e y. Le coppie (x, y) nel quadrato $[0, 5] \times [0, 5]$ sono uniformemente distribuite.

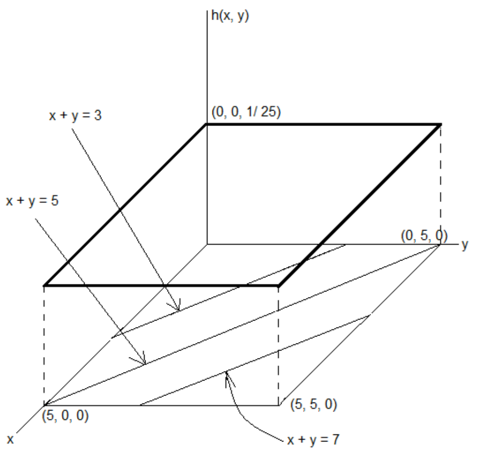


Fig. 2. La densità di probabilità congiunta $h(x, y)$. Si noti che $x+y$ genera concentrazioni di densità di probabilità diverse per w=5 e w=7.

Consideriamo, ora, la v.a. $W = X + Y$ e determiniamo la sua densità di probabilità $h(W)$. Prima, osserviamo che in figura 2 il segmento $x + y = 5$ è più lungo del segmento $x + y = 7$. Ciò dimostra empiricamente che sul valore $w = 5$ c'è più addensamento di quello presente sul valore $w = 7$. Quindi, ci dobbiamo attendere che la densità di probabilità su $w = x + y = 5$ sia maggiore di quella su $w = x + y = 7$. Per $w = 5$ si ha la massima densità di w. Questa è decrescente sia spostandosi verso lo zero, sia spostandosi verso 10. La densità di W appare graficamente nelle figure 3 e 4. Proiettando la superficie $h(w=x+y)$ su un piano ortogonale alla diagonale, che in figura 3 passa per i punti (5,0,0) e (0,5,0), si ottiene un triangolo isoscele di vertici (0,0), (5,1/5), (10,0), in coordinate a due dimensioni (fig. 4). Osservo che, dal punto di vista geometrico, la convoluzione delle due densità $a(x)$ e $b(y)$, se $w = x + y$, genera una funzione di densità di probabilità per w il cui disegno è in figura 3.

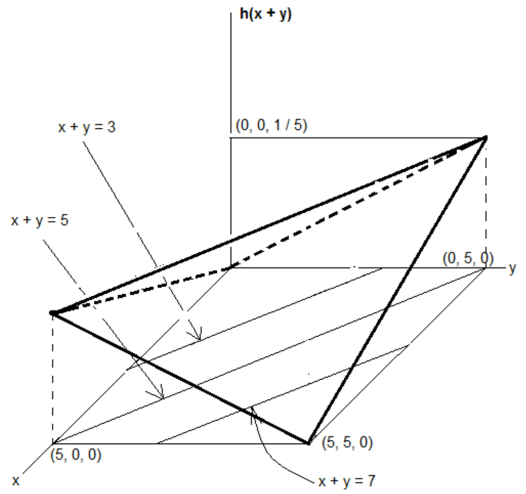


Fig. 3. La densità di probabilità $h(w)$ se $w = x + y$ in $\mathbf{R}^3$. Si nota che la convoluzione piega il segmento di piano in corrispondenza della somma di massima densità di probabilità.

Dalla geometria, applicando la nota formula della retta che passa per due punti, otteniamo:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (3)$$

da cui:

$$h(w)=\begin{cases} \dfrac{w}{25} & 0 \le w \le 5 \\ -\dfrac{w}{25}+\dfrac{2}{5}, & 5 < w \le 10 \quad (4) \\ 0 & altrove\,. \end{cases}$$

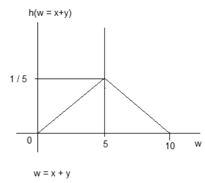


Fig. 4

Si può verificare che

$$\int_0^{10} h(w)dw = 1\,.$$

A questo punto vogliamo sapere se è possibile ottenere lo stesso risultato applicando direttamente l'operazione analitica della convoluzione. Vediamo:

$$c_{xy}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\cdot b(w-x)\cdot dx = \int_0^{10} a(x)\cdot b(w-x)\cdot dx$$

$$= \int_0^{w} a(x)\cdot b(w-x)\cdot dx \cdot I_{[0,5]}(w) + \int_w^{10} a(x)\cdot b(w-x)\cdot dx \cdot I_{(5,10]}(w)$$

$$= \int_0^{w} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot dx \cdot I_{[0,5]}(w) + \int_w^{10} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot dx \cdot I_{(5,10]}(w)$$

$$= \left[\frac{x}{25}\right]_0^{w} \cdot I_{[0,5]}(w) + \left[\frac{x}{25}\right]_w^{10} \cdot I_{(5,10]}(w)$$

$$= \frac{w}{25}\cdot I_{[0,5]}(w) + \left(-\frac{w}{25}+\frac{10}{25}\right)\cdot I_{(5,10]}(w) \qquad (5)$$

dove

$$I_{[w_1,w_2]}(w)=\begin{cases} 0 & se \quad w \notin [w_1,w_2] \\ 1 & se \quad w \in [w_1,w_2]\,. \end{cases}$$

La (5) descrive esattamente quanto è stato già ottenuto per altra via in (4).

Bibliografia: [B.1] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O., *Matematica discreta*, Hoepli, Milano, 1992. [B.2] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, John Wiley & Sons Inc., New York, 1971. [B.3] Landenna G., Marasini D., Ferrari P., *Probabilità e Variabili Casuali*, Il Mulino, Bologna, 1997.