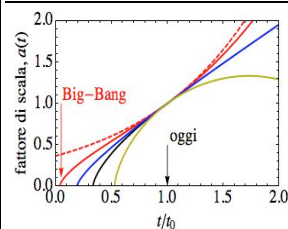


# MatematicaMente

ISSN: 2037-6367

Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 181 – Pubblicato il 03 – 09 – 2013



## Storia e trama dell'Universo Parte I: L'Universo primordiale

di Carlo Schmid <sup>[\*]</sup>

**Prologo.** Questa pubblicazione è la prima di una serie di tre sulla cosmologia moderna, organizzate secondo un ordine cronologico degli eventi cosmici a partire dalla cosiddetta «era di Planck», schermo fisico e concettuale contro il Big-Bang. In questa pubblicazione si discuteranno i tre primi minuti di vita dell'Universo, in cui appaiono le particelle elementari e di seguito gli elementi chimici più leggeri; è il dominio delle «teorie di campo quantistiche» e della fisica subnucleare e nucleare. Le interazioni gravitazionali saranno descritte nei termini della «teoria della relatività generale» di Einstein.

L'oggetto di studio della cosmologia è l'Universo, inteso come sistema fisico che si estende su scale spaziali  $L$  rispetto alle quali le galassie (la cui dimensione tipica è 1-10 kpc <sup>[1]</sup>) possono essere considerate come oggetti puntiformi (dunque  $L \gg 1$  Mpc), e la cui evoluzione è caratterizzata da tempi molto maggiori del tempo di formazione delle strutture cosmiche più piccole – per un cosmologo, le galassie.

Omettendo ogni sviluppo precedente, pur degno d'interesse storico, la cosmologia moderna nasce con le osservazioni di Hubble e collaboratori (1929), che evidenziarono un moto di recessione medio degli oggetti più distanti (galassie), con velocità proporzionale alla distanza dall'osservatore,  $v = H_0 d$ .

Su tre solidi pilastri si basa l'odierna concezione dell'Universo:

1) Una teoria «metrica» della gravitazione, quale la teoria della relatività generale, in cui le interazioni gravitazionali sono descritte in termini di curvatura e deformazione dello spazio-tempo, e in cui la propagazione delle interazioni avvenga (al più) alla velocità della luce per poter garantire il principio «relativistico» di causalità (assente nella teoria newtoniana, in cui le forze agiscono istantaneamente sui corpi). Da un punto di vista fisico, sembra naturale postulare per lo spazio-tempo una varietà a quattro dimensioni, topologicamente connessa e sufficientemente liscia, localmente descrivibile dalla metrica di Minkowski ( ${}^4g = -c^2 dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j$ , con  $\delta_{ij}$  simbolo di Kronecker) per preservare l'invarianza di fenomeni e leggi sotto le trasformazioni di Lorentz. Le perturbazioni (locali) della metrica (tensore di rango 2),  ${}^4\delta g$ , rappresentano il campo gravitazionale (locale); le equazioni che ne descrivono l'evoluzione spazio-temporale sono le equazioni d'Einstein (10 equazioni differenziali alle derivate parziali, in virtù delle identità di Bianchi); in notazione coordinata si scrivono

$$R_{\mu\nu} [g_{\mu\nu}] - \frac{1}{2} R [g_{\mu\nu}] g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

dove  $R_{\mu\nu}$  e  $R = R^\mu{}_\mu$  sono il tensore e lo scalare di Ricci, funzionali della metrica, e  $T_{\mu\nu}$  il tensore energia-impulso, sorgente (massa-energia) del campo gravitazionale. La costante di proporzionalità, scritta in termini della costante di Newton  $G$  e della velocità della luce  $c$ , garantisce il recupero delle equazioni della gravitazione newtoniana nel limite di campo debole ( $|\delta g| \ll 1$ ,  $|\partial \delta g| \ll 1$  e  $|\partial^2 \delta g| \ll 1$  in unità adimensionali;  $\partial$  denota la derivata parziale). L'assenza della costante di Planck,  $h$ , è indice che questa teoria non è però quantistica, quindi non valida per descrivere l'evoluzione del campo gravitazionale in

condizioni «estreme», dette di Planck, cioè su distanze inferiori a  $l_{PL} = \sqrt{hG/c^3} \sim 10^{-35}$  m, tempi inferiori a  $t_{PL} = \sqrt{hG/c^5} \sim 10^{-44}$  s, energie superiori a  $E_{PL} = h/t_{PL} = \sqrt{c^2/hG} \sim 10^{28}$  eV; si potranno al più considerare campi gravitazionali «quantizzati», ma l'evoluzione sarà «classica».

2) Il Principio Cosmologico, che estende a tutto l'Universo l'omogeneità e isotropia medie osservate su larga scala ( $L > 100$  Mpc);<sup>[2]</sup> nel linguaggio della Geometria Differenziale, ciò corrisponde uno spazio massimamente simmetrico, caratterizzato da un tempo cosmico uguale per tutti gli osservatori (la geometria ha un vettore di Killing di tipo tempo) e «curvatura intrinseca» ( $K$ ) costante (le proprietà metriche degli oggetti, e quindi le misure di distanze e tempi, sono invarianti sotto traslazioni e rotazioni spaziali). Tre sole sono le geometrie spaziali compatibili, descritte da una metrica 3-dimensionale  $\gamma_{ij}$  piana (o euclidea,  $K = 0$ ), sferica (o gaussiana,  $K = +1$ ) e iperbolica (o di Lobačevskij,  $K = -1$ ).<sup>[3]</sup> Conseguentemente, la metrica 4-dimensionale è quella di Robertson-Walker (1928):  ${}^4g = -c^2 dt^2 + a(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j$ , dove  $a(t)$  – detto «fattore di scala» – definisce la distanza «fisica» tra punti al tempo  $t$ . Consistentemente con questa metrica, il tensore energia-impulso potrà essere solo quello di un «fluido perfetto», caratterizzato da densità ( $\rho$ ) e pressione idrostatica ( $p$ ) dipendenti solo dal tempo, non dalla posizione. Le dieci equazioni di Einstein si riducono così alle due equazioni differenziali ordinarie di Friedmann (1929), che descrivono la velocità e l'accelerazione relativa del fattore di scala (o, rozzamente, dell'Universo) in funzione del tempo:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{K}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \rho & (1.1) \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p/c^2) & (1.2) \end{aligned} \right.$$

Per chiudere il sistema di equazioni (1) nelle tre variabili ( $a$ ,  $\rho$ ,  $p$ ) si introduce un'«equazione di stato» che descriva le proprietà termodinamiche del fluido, solitamente nella forma  $p \equiv p(\rho) = w c^2 \rho$ , con  $w = 1/3$  per i fluidi relativistici (radiazione elettromagnetica, neutrini) e  $w \sim 0$  per quelli non-relativistici (materia ordinaria e materia oscura fredda). Ciò conduce a un'equazione di conservazione dell'energia, la cui soluzione è  $\rho(a) = \rho_0 (a/a_0)^{3(1+w)}$ : la densità d'energia non-relativistica (densità di materia), ad esempio, decresce proporzionalmente al «volume» dell'Universo ( $a^3$ ), in virtù della sua espansione.

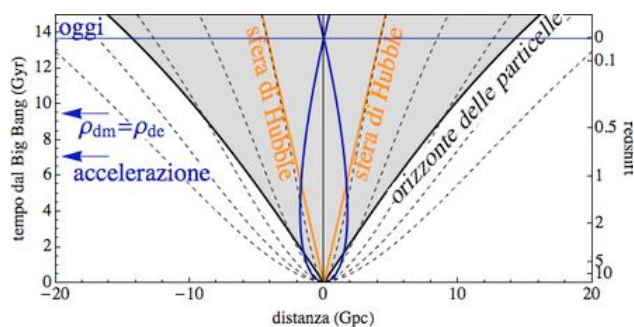


Figura 1. Diagramma di Minkowski per il modello di Friedmann.

Il sistema (1) è risolto (in modo univoco, essendo verificata la lipschitzianità sul dominio) fissando le condizioni iniziali ad oggi ( $t_0$ ), quando si fanno le osservazioni; localmente si ri-

trova il risultato di Hubble, la cui omonima costante è  $H_0 \equiv H(t_0) = (d(\ln a(t))/dt)_{t=t_0} = 72 \pm 8 \text{ km/s/Mpc}$  [B.1]. È interessante notare come un Universo "vuoto" ( $\rho = 0, p = 0$ ) e a geometria sferica ( $K=1$ ) abbia un'evoluzione temporale non banale,  $a(t) = \pm K^{1/2}t$ . Altrettanto interessante notare che se  $(\rho + 3p/c^2) > 0$ , esiste un istante  $t^*$  in cui  $a(t^*) = 0$ : se nel passato ( $t^* < t_0$ ), lo si chiama Big-Bang; se nel futuro (possibile solo se  $K = +1$ ), lo si chiama Big-Crunch. In corrispondenza a un valore nullo del fattore di scala, la densità d'energia diverge: è una patologia della relatività generale, limitata, di fatto, alle scale di Planck – parlare di "nascita" e "morte" dell'Universo è un'ingiustificata antropizzazione di una soluzione matematica.

Il modello di Friedmann definisce una struttura non banale del cono-luce nel passato (linea blu in Fig.1), che "si chiude" nel punto (0,0) – il Big-Bang – a  $13,80 \pm 0,06$  miliardi d'anni da oggi [B.2]. L'«orizzonte delle particelle», in espansione a velocità maggiore della luce, stabilisce la regione "causalmente connessa" d'ogni osservatore (oggi è  $L_{\text{hor}} \sim 14 \text{ Gpc}$ ), al di là della quale la fisica causale non è definita. La «sfera di Hubble», luogo di punti in espansione a velocità della luce (oggi di raggio  $c/H_0 \sim 4200 \text{ Mpc}$ ), definisce infine la grandezza scala della cosmologia. Da un punto di vista osservativo, è più opportuno misurare il tempo attraverso il *redshift* ( $z$ ) delle lunghezze d'onda emesse o assorbite dalle "sorgenti", diretto effetto dell'espansione dell'Universo; si prova che  $z + 1 \equiv \lambda_{\text{obs}} / \lambda_{\text{em}} = a(t_0)/a(t)$ , quindi oggi  $z = 0$  mentre il Big-Bang corrisponde a  $z \rightarrow \infty$ .

3) Il Modello Standard della fisica delle particelle elementari, che fornisce il contenuto dell'Universo in termini di neutrini, elettroni, quark, fotoni (insieme ai bosoni vettori  $W^\pm$  e  $Z^0$ , i gluoni e il campo di Higgs; [B.3]). La «materia oscura» (fredda), la forma più abbondante di materia nell'Universo, necessaria per spiegare la formazione delle strutture cosmiche più estese altrimenti morfologicamente assai diverse (galassie, ammassi di galassie, ecc.), non rientra in questo quadro.

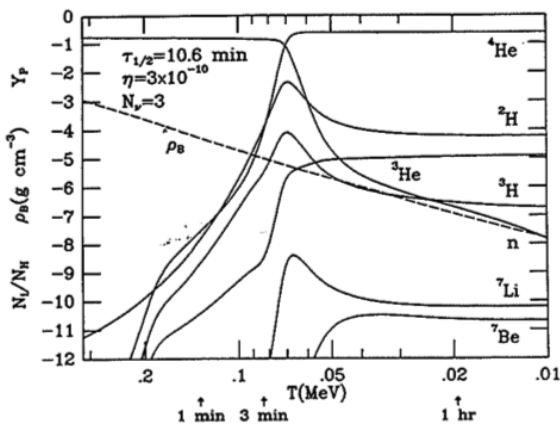


Figura 2. Nucleosintesi primordiale. Abbonanze degli elementi leggeri (relativa all'idrogeno) in funzione della temperatura media dell'Universo, espressa in unità naturali (da [B.2]).

Applicando la termodinamica d'equilibrio e considerando l'Universo in espansione adiabatica, ipotesi giustificate nella fase primordiale, la temperatura media delle specie (inizialmente tutte relativistiche) decrescerà nel tempo proporzionalmente ad una potenza del fattore di scala,  $T = T_{in} [a(t_{in}) / a(t)]^m$ , si possono così verificare tre transizioni di fase («elettrodebole», «quark-adroni» e «nucleosintesi primordiale»), attraverso le quali si giunge prima all'elettromagnetismo a bassa energia (nella forma nota delle equaz. di Maxwell;  $T \sim 10^{15} \text{ K} \sim 1 \text{ TeV}/k_B$ ), quindi alla formazione di protoni e neutroni dalla fusione dei quark ( $T \sim 10^{13} \text{ K} \sim 1 \text{ GeV}/k_B$ ), infine alla formazione degli elementi chimici leggeri: idrogeno, deuterio, elio, litio, berillio e loro isotopi ( $T \sim 10^9 - 10^{10} \text{ K} \sim 0.1 - 1 \text{ MeV}/k_B$ ).

In ogni epoca, l'abbondanza di ogni specie (collettivamente descritta da una funzione di distribuzione,  $f$ ) è descritta da un'equazione di Boltzmann-Liouville relativistica,  $Df/Dt = C[f]$ , con  $D/Dt$  derivata totale, (dunque dipendente da  $^4g$ ) e  $C[f]$

«operatore di collisione». In contesto cosmologico diventa

$$\dot{n} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3\mathbf{p}}{E} = -\langle \sigma|v| \rangle (n^2 - n_{eq}^2) \quad (2)$$

dove la seconda uguaglianza vale nell'ipotesi di soli urti a due corpi tra particelle della stessa specie; la densità di ogni specie,  $n(t)$ , è regolata dal bilancio tra tasso di espansione dello universo,  $H(t)$ , e tasso medio di collisione tra le particelle, che dipende dalla sezione d'urto  $\sigma$  caratteristica dell'interazione e dalla velocità relativa  $v$  delle particelle (si indica con  $\langle \dots \rangle$  la media termodinamica,  $n_{eq}$  l'abbondanza all'equilibrio termodinamico, ed  $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$  l'energia di ogni singola particella di massa  $m$  e momento  $p$ ). Secondo l'eq. (2), seconda uguaglianza, che è una equazione di Riccati, l'abbondanza finale di ogni specie decresce quasi linearmente con  $\langle \sigma|v| \rangle$ . In generale, l'eq. (2) è rimpiazzata da un sistema d'equazioni differenziali accoppiate, che tiene conto di tutte le possibili interazioni, simile a quanto si incontra in cinetica chimica. La fig.2 mostra il risultato per la nucleosintesi primordiale, che si conclude a circa 3 minuti dal Big-Bang; siamo a *redshift*  $z \sim 10^8$ .

### I primi $10^{-32}$ secondi

Il modo più economico per spiegare la piatezza dell'Universo, l'isotropia media su larga scala, l'assenza di monopoli magnetici è postulare una fase dell'Universo primordiale in cui  $L_{\text{hor}} \sim$  costante, possibile solo se l'espansione è accelerata: si parla di «inflazione primordiale». In accordo con l'eq. (1.2), l'Universo doveva allora essere dominato da un'insolita forma di «materia», con pressione  $p < -\rho c^2/3$ : ciò è realizzabile con un «campo scalare»  $\phi$  (spin 0) in «rotolamento lento» verso il minimo del suo potenziale. Ad esempio, con un potenziale esponenziale,  $V(\phi) = V_0 \exp(-\beta\phi)$ , si ottiene  $a(t) \propto t^p$ ,  $p = 2/\beta^2$ : c'è inflazione se  $p > 1$  [B.4]. Di più, le inevitabili fluttuazioni quantistiche di questo campo,  $\delta\phi(x, t)$ , che si trasformeranno poi in fluttuazioni di materia (i germi delle strutture cosmiche), hanno esattamente le proprietà statistiche (sostanzialmente gaussiane) delle strutture cosmiche osservate su larga scala: un successo straordinario!

Per tempi precedenti all'era di Planck sarà necessario abbandonare la relatività generale ed abbracciare una teoria quantistica della gravitazione, come la teoria-M, le teorie di super-stringa o la teoria *a loop* [B.5].

#### Note:

[1] Un parsec, abbreviato pc, corrisponde approssimativamente a 3,26 anni luce, cioè  $3,09 \times 10^{13} \text{ km}$ ; per riferimento, la distanza tra il Sole e la stella Proxima Centauri è di 1,3 pc.

[2] L'omogeneità (globale) può essere dedotta applicando la versione generalizzata del Principio Copernicano (secondo cui nessun osservatore occupa una posizione privilegiata nell'Universo) all'isotropia della temperatura della radiazione cosmica di fondo, osservata da Penzias e Wilson (1965) e confermata a livello di 0,001% dall'esperimento FIRAS del satellite COBE (1995) e dai satelliti WMAP (2001) e Planck (2012; [B.1]).

[3] In coordinate sferiche l'elemento di volume si scrive  $\gamma_{ij} dx^i dx^j = dr^2 / (1 - Kr^2) + r^2 d\Omega^2$ , con  $d\Omega$  angolo solido usuale.

**Bibliografia.** [B.1] W. Freedman *et al.*, *Ap.J.*, 553 (1), 47-72 (2001). [B.2] Planck Collaboration (2013), "Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results", arXiv:1303.5062. Si veda anche <http://lambda.gsfc.nasa.gov/>. [B.3] E. W. Kolb & M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley (1990). [B.4] F. Lucchin & S. Matarrese, *Phys.Rev.D* 32, 1316 (1985). [B.5] B. Green, *L'universo elegante*, Einaudi (2000).

[\*] Aix-Marseille Université & CNRS, LAM (Laboratoire d'Astrophysique de Marseille) UMR 7326, 13388, Marseille, France email: [carlo.schimd@oamp.fr](mailto:carlo.schimd@oamp.fr)

**Nota di redazione.** La Rete delle Scuole di Verona, in collaborazione con Mathesis, ha organizzato quest'anno quattro incontri di aggiornamento sulla cosmologia moderna. Il dott. Schimd è stato uno degli apprezzati relatori e ha gentilmente accettato di ampliare e approfondire in questa sede i temi del suo intervento dell'1/3/2013 dal titolo "L'oscura trama del cosmo".