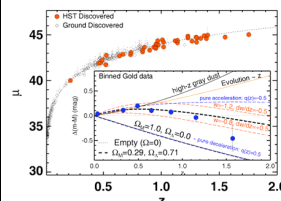


MatematicaMente

ISSN: 2037-6367

Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 183 – Pubblicato il 13 – 11 – 2013



Storia e trama dell'Universo Parte III: L'Universo oscuro

di Carlo Schimid [*]

Riassunto. La terza e ultima parte della serie presenta l'evoluzione del cosmo a partire dalla fine della cosiddetta «età oscura», 0,5 miliardi di anni dopo il Big-Bang, quando i primi oggetti luminosi fanno la loro comparsa. Sette miliardi di anni più tardi, quando galassie, ammassi di galassie e strutture cosmiche più estese sono nel pieno della loro formazione, in balia di idrodinamica non lineare e processi radiativi, una nuova, incompresa forma di energia sembra che cominci a dominare l'Universo: l'«energia oscura». È forse il momento di riconsiderare i limiti della teoria della relatività generale?

Da 300 000 anni dopo il Big-Bang, «istante» in cui le condizioni termodinamiche dell'Universo consentirono finalmente la libera propagazione della radiazione elettromagnetica (la radiazione cosmica di fondo), fino a 0,5 miliardi di anni più tardi (circa 13,2 miliardi di anni da oggi, $z \sim 10$), l'Universo si trovava nella cosiddetta «età oscura»: le interazioni, gravitazionali anzitutto, avevano effetto principalmente sulle grandi scale, determinando l'evoluzione media del cosmo, ma localmente non c'erano le condizioni fisiche per la formazione degli oggetti astrofisici «fondamentali» come stelle o quasar, sorgenti di luce «puntiformi». In termini matematici, le fluttuazioni del campo gravitazionale Φ e delle grandezze che definiscono il fluido cosmico (densità, pressione, entropia) cominciano a differire sensibilmente dal valor medio solo a $z \lesssim 10$. Ogni sviluppo perturbativo delle equazioni della dinamica, anche nelle sue forme più raffinate come la teoria perturbativa lagrangiana (di cui fu precursore il modello di Zel'dovich [B.1]), cessa di essere valido. La soluzione delle equazioni viene eseguita per via numerica, di solito ricorrendo all'approssimazione newtoniana, valida su scale inferiori all'orizzonte di Hubble ($\sim c / H_0$) ed adatta alla descrizione della formazione delle strutture cosmiche; gli algoritmi, analoghi a quelli della dinamica molecolare, trattano le interazioni nello spazio delle configurazioni (con regolarizzazioni contro le divergenze che emergono a piccole distanze, $\Phi \sim -GM/r$, limitando però la risoluzione spaziale), oppure nello spazio reciproco (o di Fourier, quando è capitale un'elevata risoluzione spaziale, come nella risoluzione degli *choc* idrodinamici) o ancora soluzioni ibride, come le «griglie adattative» o gli algoritmi «ad albero» [B.2].

Poiché la «materia oscura» è circa sei volte più abbondante della materia ordinaria ed interagisce solo gravitazionalmente, in prima approssimazione è possibile trattare la dinamica delle due componenti separatamente, trattando la seconda come correzione a posteriori; nei modelli semianalitici, ad esempio, si usano leggi empiriche per descrivere gli effetti locali di venti stellari, supernovae e regioni ionizzate (ad esempio da stelle di classe O e B, con spettro UV sufficientemente potente); si possono così ottenere simulazioni rapide ed efficaci fino a larga scala ($\sim Gpc$), utili per il confronto con le osservazioni. In generale, galassie e ammassi di galassie tracciano in modo diverso la distribuzione della materia oscura sottostante (fig.1); con un approccio statistico, per ogni classe di oggetti C si parla di *bias* (deterministico o stocastico, globale o locale), usando relazioni del tipo $n_C = \delta_{mat} \otimes W(R) + \varepsilon$, dove n_C è il numero di oggetti per unità di volume (processo sto-

castico discreto), δ_{mat} il contrasto di densità della materia (processo stocastico continuo; vedi Parte II [1]), \otimes un prodotto di convoluzione per una funzione finestra $W(R)$ che caratterizza il «bacino di influenza» di taglia caratteristica R (asintoticamente $W(x) \approx 1$ per $x \ll R$ e $W(x) \approx 0$ per $x \gg R$) e ε il «rumore», che codifica gli effetti idrodinamici e radiativi «microscopici».

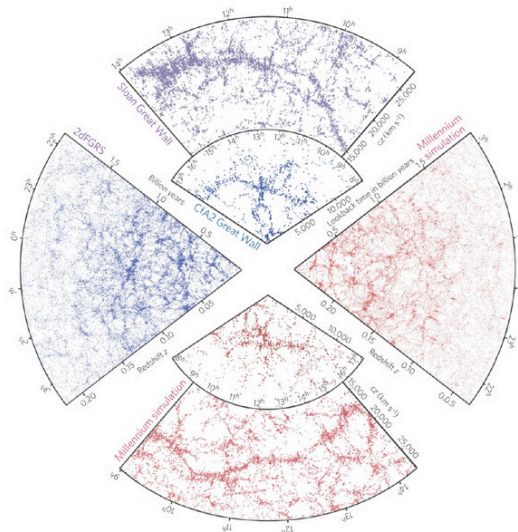


Figura 1. Distribuzione delle galassie osservate in porzioni di cielo di $\sim 10^3$ - 10^4 deg², ottenute dai cataloghi CF2A (ingrandimento), 2dFGRS, SDSS (in blu) e delle «particelle» di materia oscura nelle simulazioni numeriche Millennium (in rosso); le posizioni dei $\sim 10^3$ - 10^6 oggetti sono proiettate sul piano del foglio e l'osservatore usa il redshift come misura della coordinata radiale, secondo un sistema di coordinate sferiche centrato sulla Via Lattea (posta ai vertici dei coni). La «rete cosmica», dominata a larga scala da regioni vuote (vedi Parte II), può mostrare forme bizzarre come le Dita di Dio (CfA2 Great Wall, nello zoom). Fonte: [B.3]

Trattandosi di processi stocastici, le proprietà geometriche sono descritte in termini di momenti della funzione di distribuzione $p(\delta)$ e di funzioni di correlazione $\langle \delta^m(\mathbf{x}_1) \dots \delta^n(\mathbf{x}_N) \rangle$, dove con $\langle \dots \rangle$ si indica il valor medio secondo $p(\delta)$ e $m, n \in \mathbf{N}$. Finché l'evoluzione cosmologica è non lineare (tempi iniziali e/o grandi distanze), $p(\delta)$ è sostanzialmente una distribuzione gaussiana (teorema del limite centrale), pertanto descritta unicamente dai momenti d'ordine 1 e 2, con $\langle \delta \rangle = 0$ e $\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle$; quest'ultima descrive la probabilità in eccesso rispetto ad un processo di Poisson che due oggetti siano a distanza relativa r , o equivalentemente $dP(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = dP(\mathbf{x}+\mathbf{r} | \mathbf{x}) = [1+\xi(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}$ è la probabilità condizionata che un oggetto sia in \mathbf{x}_1 ed uno entro un volume $d^3\mathbf{r}$ centrato in \mathbf{x}_2 . L'isotropia su larga scala si traduce in $\xi(\mathbf{r}) = \xi(|\mathbf{r}|)$ e, per distanze inferiori a circa 20 Mpc, si trova $\xi(r) \approx (r/r_0)^{-1.8}$; dovendo $\xi(r)$ diventare nulla per distanze maggiori, poiché $\int \xi(r) d^3\mathbf{r} = 0$. Importante notare che direttamente osservabile non è la posizione assoluta di un oggetto, \mathbf{r} , ma solo la sua posizione angolare sulla sfera celeste e il redshift z ; questo include l'effetto Doppler dovuto ai moti peculiari, per cui $cz = H_0 d(r) + v_p(r)$, con $H_0 d(r)$ «flusso di Hubble» dipendente dal modello cosmologico e $v_p(r)$ modulo della velocità dell'oggetto lungo la linea di vista, dovuta al campo gravitazionale locale; la ricostruzione di \mathbf{r} si ottiene

per via statistica, o analiticamente per $r \gg 10$ Mpc.

Adottando il modello di Friedmann (Parte I), le analisi statistiche di tutte le grandezze osservabili indicano un Universo

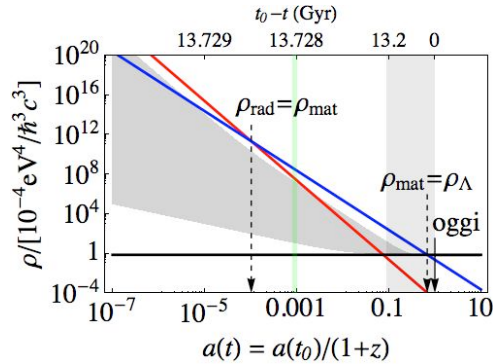


Figura 2. Densità d'energia di radiazione (in rosso), materia (oscura e ordinaria, insieme; in blu) e del vuoto (o «costante cosmologica»; in nero) in funzione del fattore di scala $a(t)$; sull'asse superiore, il lookback time ($t_0 - t$). Dalla diffusione della radiazione cosmica di fondo (banda verde verticale) alla comparsa delle prime sorgenti luminose puntiformi ($z \sim 10$) l'universo si trova nella cosiddetta «età oscura»; successivamente, e fino ad oggi (banda verticale grigia), si sono formate galassie ed ammassi, che tracciano la «rete cosmica» su larga scala. La dinamica globale, e forse anche quella locale, non sarebbero modificate da forme alternative di «energia oscura» che rimpiazzassero la costante cosmologica senza però modificare il bilancio energetico nelle altre epoche (regione in grigio scuro).

con geometria spaziale *essenzialmente* euclidea ($K = 0$), con *oggi* ($z = 0$) solo il 26% di materia (oscura e ordinaria) capace di «addensarsi» e collassare; il restante 74%, che determina sensibilmente la scala delle distanze e dei tempi, dev'essere una forma di energia (anch'essa detta «oscura», poiché non interagente con la radiazione elettromagnetica) distribuita omogeneamente nello spazio, almeno sulle distanze osservate ($\sim c/H_0$) [2]. La prima, chiara indicazione della sua natura (onorata del premio Nobel per la Fisica nel 2011) venne dall'analisi del «modulo di distanza» delle supernovae di tipo Ia (Snl) in funzione del redshift, $\mu \equiv m - M = 5 \log d_L(z) + \text{cost.}$: m e M indicano la magnitudine apparente ed assoluta dell'oggetto, quest'ultima costante per le Snl; la «distanza di luminosità» $d_L(z) \equiv (1+z)^{-1} \sin(K^{1/2} \int c/H(\zeta) d\zeta)$, con integrale tra 0 e z , è funzione della curvatura K . Lo sviluppo in serie in z valido fino a $z \lesssim 2$, $d_L(z) \approx cz/H_0 - (c/H_0)[1 - \partial z \log H(z)/2]_{z=0} z^2$, mostra al second'ordine una deviazione dalla legge di Hubble compatibile con i dati osservati solo introducendo una nuova forma di energia, oggi dominante, con pressione $p < -\rho/3c^2$. La soluzione più semplice è la «costante cosmologica», termine additivo nelle equazioni di Einstein della forma $-\Lambda$ (4), leggibile come fluido perfetto con densità d'energia $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ (costante) e pressione $p_\Lambda = -\rho_\Lambda/c^2$. La stessa espressione descrive lo stato di vuoto quantistico associato alle creazioni e annichilazioni delle coppie particella-antiparticella, sorgente di una forza repulsiva (effetto Casimir); ciononostante, anche considerando solo le particelle del Modello Standard, la densità d'energia del vuoto ρ_v (dominata dalle specie più massive, in particolare il bosone di Higgs) sarebbe 10^{53} volte maggiore di quella osservata, ρ_Λ , crescendo ulteriormente quando si considerino i candidati più comuni di materia oscura.

Una forma alternativa d'energia oscura potrebbe essere «dinamica», un fluido cioè con equazione di stato $w = p/\rho$ variabile nel tempo [B.4]. Un «campo scalare» ϕ (fondamentale o efficace, analogo a quello responsabile dell'inflazione primordiale) offre una soluzione efficace; la sua dinamica, descritta dall'equazione di Klein-Gordon $c^2 \partial_t^2 \phi + c^2 H(t) \partial_t \phi - \nabla^2 \phi + \partial V(\phi)/\partial \phi = 0$, permette di alleggerire il problema delle condizioni iniziali intrinseco alla costante cosmologica se si introducono opportuni potenziali $V(\phi)$, ad esempio una legge di potenza inversa: usando il linguaggio dei Sistemi Dinamici, la

componente omogenea $\phi_{\text{om}}(t) \equiv \langle \phi(t, \mathbf{x}) \rangle$, e quindi la densità d'energia associata $\rho_\phi(t) = \frac{1}{2}[\partial_t \phi_{\text{om}}(t)]^2 + V[\phi_{\text{om}}(t)]$, può evolvere verso soluzioni di tipo attrattore indipendentemente dalle condizioni iniziali $\{\phi(t_{\text{in}}), \partial_t \phi(t_{\text{in}})\}$, convergendo asintoticamente con un comportamento tipo costante cosmologica (regione in grigio scuro in fig.2). La dipendenza spaziale, conseguenza della covarianza delle equazioni rispetto alle trasformazioni di Lorentz, è associata alle fluttuazioni del campo scalare, $\delta\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}) - \phi_{\text{om}}(t)$; l'omogeneità dell'energia oscura osservata oggi sulla scala di Hubble, c/H_0 , supporta uno sviluppo perturbativo dell'equazione di Klein-Gordon, che si riduce a quella di un oscillatore armonico (eventualmente quantizzabile) con massa $m = \sqrt{\partial^2 V(\phi_{\text{om}})/\partial \phi^2} \approx H_0 \sqrt{8\pi G} \hbar c^{-5}$ (consistentemente, quest'ultima approssimazione è valida a $t = t_0$).

Una seconda possibilità alternativa all'energia oscura consiste nel modificare la teoria della gravitazione [B.5]. Oltre alle formulazioni fenomenologiche basate sulla modifica del potenziale newtoniano, come $\Phi = -GM e^{-r/r^*}/r$, il cui sviluppo in serie di Taylor dà il potenziale newtoniano per $r \ll r^*$, è possibile muovere da principi primi, applicando il principio variazionale all'azione che descrive le interazioni gravitazionali. Detto $R \equiv R[g_{\mu\nu}]$ lo scalare di Ricci (vedi Parte I), così come le equazioni della relatività generale sono ottenute variando l'azione di Hilbert-Einstein $S[g_{\mu\nu}] = \int d^4x [-\det(g_{\mu\nu})]^{1/2} R[g_{\mu\nu}]$ rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$ (campo di spin 2 nel linguaggio della teoria dei campi), una nuova teoria della gravitazione (diversa dalla relatività generale per grandi distanze) è ottenuta ad esempio rimpiazzando R con una funzione $F(R)$, col vincolo $F(R) \approx R$ per distanze dove la relatività generale è sperimentalmente ed osservativamente verificata; si dimostra che queste teorie sono sia classicamente che quantisticamente equivalenti a teorie con azione di Hilbert-Einstein con uno o più campi scalari ϕ (spin 0) che contribuiscono alla trasmissione delle interazioni gravitazionali, accoppiandosi con la materia non solo gravitazionalmente (a differenza del caso precedente), tipicamente determinando il valore della massa a riposo delle particelle. Questo tipo d'azioni emergono nelle teorie di superstringa, candidate ad estendere il Modello Standard (testato fino ad un'energia di circa 1 TeV) fino alla scala di Planck ($\sqrt{c^5 \hbar/G} \approx 10^{19} \text{ GeV}$) e oltre.

Materia oscura ed energia oscura potrebbero infine essere un effetto almeno parzialmente non dovuto a nuovi campi, ma intrinseco alla non linearità delle equazioni di Einstein e alla non commutazione delle operazioni di media spaziale (a tempo fissato) ed evoluzione temporale: si parla di «retroazione» delle fluttuazioni del campo gravitazionale, accoppiate alle medie spaziali degli osservabili [B.6]. Per un dominio D di volume $V_D = [a_D(t)]^3$, si ottengono delle equazioni analoghe a quelle di Friedmann in $a_D(t)$; per l'accelerazione (cfr. Parte I, eq.1.2) si trova $3[\partial_t^2 a_D(t)/a_D(t) - 4\pi G (\langle \rho \rangle_D + 3\langle p \rangle_D) + \Lambda + Q_D$, con $Q_D \equiv 2 \langle (H - \langle H \rangle_D)^2 \rangle_D - 6\langle \sigma^2 \rangle_D$: per ampie fluttuazioni del parametro di Hubble H del dominio D , che ne descrive il tasso di espansione isotropa, l'effetto è repulsivo, analogo a Λ ; se invece domina $\langle \sigma^2 \rangle_D$, valor medio del quadrato della deformazione anisotropa del volume V_D , l'effetto è attrattivo, analogo a quello della materia, in particolare oscura.

Note. [1] Le parti I e II del lavoro sono in *MatematicaMente* nn. 181 e 182. [2] Le analisi statistiche adottano l'approccio bayesiano, non potendo definire le misure ripetute (alla base dell'approccio frequentista) per un osservabile – l'Universo – che per definizione è unico.

Riferimenti bibliografici.

[B.1] Zel'dovich, *Astronomy & Astrophysics*, 5, 84 (1970). [B.2] Dolag *et al.*, *Space Science Reviews*, 134, 229 (2008). [B.3] De Lapparent, Geller & Huchra, *The Astrophysical Journal Letters* 302, 1 (1986); <http://www.sdss.org/>, <http://www2.aao.gov.au/2dfgrs/>; Springel, White *et al.*, *Nature* 435, 629 (2005). [B.4] Copeland, Sami & Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D*, 15, 1753 (2006). [B.5] Clifton *et al.*, *Physics Reports*, 513,1 (2012). [B.6] Buchert, *Class. Quantum Grav.*, 28, 500 (2011)

[*] Aix-Marseille Université, CNRS, LAM (Laboratoire d'Astrophysique de Marseille) UMR 7326, 13388, Marseille, France – email: carlo.schimd@lam.fr