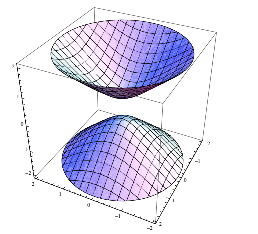
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente



Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 185 – Pubblicato il 07 – 01 – 2014

MA PERCHÉ È COSÍ DIFFICILE INSEGNARE LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE?

di Antonino Drago [*]

[*Segue dal n.* 184]

13° Esiste però un metodo semplice per introdurre la visione delle quattro geometrie, quelle che fino al secolo scorso, sono state le più importanti nelle applicazioni alla realtà. Questo metodo accoglie il suggerimento di Poincaré: le geometrie (più importanti) sono quattro; egli le individua (almeno indicativamente) mediante i loro elementi fondamentali: la retta e il raggio di curvatura. Infatti, esse risultano da: la retta o finita (cioè anche periodica, la geometria ellittica) o come fascio di rette approssimanti i punti all'infinito, la geometria iperbolica); e il raggio di curvatura o infinito (geometria euclidea o geometria di Minkowski), o finito (geometria ellittica e geometria iperbolica). Questo metodo è molto produttivo: permette di vedere subito tutte le geometrie d'interesse, di caratterizzarle nella loro costituzione basilare e di vederle globalmente nei loro modelli di superfici quadratiche.[9]

14° Questa caratterizzazione, che riguarda solo due elementi base, non è ingenua o semplicistica perché, sul piano scientifico-filosofico, questi elementi corrispondono a quanto di più profondo si possa pensare delle geometrie: i fondamenti (secondo una caratterizzazione dei fondamenti della matematica e della scienza in generale che non ha avuto finora smentite o rivali). Essi sono costituiti da due opzioni, quella sul tipo di infinito (o in atto, o solo potenziale e magari finito), e quella sul tipo di organizzazione della teoria (o deduttiva, da pochi assiomi, o basata su un problema, come è la teoria dei numeri reali).[10] La tabella 1 indica le corrispondenze tra le scelte sulle due opzioni e le scelte sui due elementi geometrici (retta e raggio di curvatura) che danno le quattro geometrie. In effetti, uno schema simile si trova anche per le quattro versioni del principio d'inerzia (di Cartesio, di Cavalieri, di Enriques e di Lazare Carnot) e per i quattro tipi di meccanica (di Newton, dei continui, di Lagrange e di L. Carnot). Abbiamo così ottenuto non solo un'introduzione scolastica alle geometrie non euclidee, ma anche ai fondamenti delle stesse e in generale ai fondamenti della Matematica. In questo modo l'introduzione scolastica delle geometrie non euclidee acquista tutta la sua importanza storica, fondazionale e culturale.

Tabella n. 1. LE 4 GEOMETRIE

	OA	OP
IA	EUCLIDEA: - raggio di curvatura reale - rette: con i punti all'infinito	PSEUDO-EUCLIDEA - raggio di curvatura non costante - rette: anche euclidee
IP	ELLITTICA: - raggio di curvatura finito reale - rette: senza punti all'infinito	DI LOBACEVSKIJ - raggio di curvatura immaginario - rette: approssimanti punti all'infinito

OA = Organizzazione Aristotelica OP = Organizzazione problematica
IA = Infinito in atto IP = Infinito potenziale

15° Poiché le scelte sulle due opzioni sono dicotomiche, una geometria che alla base ha, ad es., l'infinito potenziale è incompatibile con una geometria che ha alla base l'infinito in atto (si pensi al caso di una retta). Più precisamente la diversità delle scelte le rende *incommensurabili*;[11] letteralmente, senza una comune misura tra grandezze diverse; o meglio in questo caso, di teorie, senza un comune linguaggio (che sia al loro livello): ogni traduzione dell'una nell'altra è solo parziale e si basa su formule particolari che sono da ricercare opportunamente (ad es., tra le prime tre geometrie solo le formule trigonometriche spaziali possono essere tradotte facilmente).

16° La morale di tutta questa storia allora è che le geometrie non euclidee sono l'esempio di un gruppo di teorie incommensurabili; che perciò non si è mai riusciti a compararle fedelmente, benché si sia cercato di farlo con le più varie tecniche parzializzanti: le metriche, i modelli euclidei, la proiettiva, la affine, i gruppi, l'assiomatica. Allora, nella storia della matematica le geometrie euclidee ci hanno insegnato molto: che ci sono non solo diverse maniere di concepire rette parallele, o diversi spazi geometrici, o diverse teorie geometriche, o diverse maniere di considerare assieme, in maniera parziale, un gruppo di teorie matematiche, ma anche, come abbiamo visto ora, che tra teorie diverse ci possono essere delle incommensurabilità.

17° Per sormontare la difficoltà, invece di cercare tecniche sempre nuove, occorreva fare attenzione ai fondamenti delle geometrie non euclidee. Ci si sarebbe accorti che la sapienza della geometria euclidea è stata quella di basarsi su riga e compasso, o meglio su retta e cerchio, che di fatto indicano le opzioni fondamentali sull'infinito e sulla organizzazione degli enti geometrici e quindi anche delle idee della teoria. Inoltre, con più attenzione alla fondazione di Lobacevskij avrebbe fatto notare che già due secoli fa egli aveva già spaziato nei fondamenti della matematica: aveva criticato l'astrattezza della geometria euclidea ed aveva scelto per la sua geometria la sola operatività (quindi il solo infinito potenziale) e lo sviluppo senza assiomi ma rivolto a risolvere un problema; per il quale egli ha ragionato come nessun altro nella storia della scienza fino a lui (eccetto Sadi Carnot in termodinamica) in quella logica classica (frasi doppiamente negate e teoremi per assurdo) che è tipica della organizzazione teorica alternativa alla deduttiva.[12]

18° Se tutto quanto detto sopra è stato a lungo ignorato o coperto è perché, da una parte, il Bourbaki ha svalutato la geometria come una costruzione troppo complessa e antiquata rispetto alle sue strutture basilari; e dall'altra, nella scuola la geometria euclidea è ancora mitica: infatti tutto l'insegnamento di Matematica è composto da spezzoni di teorie, dalle più antiche (teoria dei numeri) alle più moderne (teoria degli insiemi), secondo un atteggiamento tecnicistico (calcolismo e teoremismo); senza che si faccia vedere mai una teoria compiuta, salvo la geometria euclidea, l'unica a svettare come teoria intera.[13] Perciò essa è presentata in modo da turbare il meno possibile la sua tradizione.

Riferimenti bibliografici:

[9] Le ho presentate la prima volta in "Minkowsky, Poincaré, Lobacevskij: la via geometrica alla relatività ristretta", in P. Tucci (ed.), *Atti XVIII Congr. Naz. Storia Fis. E Astr.*, Dip. Fis. Generale e Appl., Univ. Milano, Milano, 1998, 151-170, dove ho fatto vedere che con la geometria non euclidea si può passare con facilità alla relatività ristretta.

[10] A. Drago, "I quattro modelli della realtà fisica", *Epistemologia,* **13** (1990) 303-324; *Le due opzioni*, La Meridiana, Molfetta BA, 1991.

[11] Il concetto è stato introdotto da P.K. Feyerabend e T.S. Kuhn ed è stato ridefinito secondo le strutture suddette dal mio scritto: "An effective definition of incommensurability", com. to *VIII Congress on Logic, Meth. and Phil. Sci.,* Mosca, 1987, 4, pt.1, 159-162, e in C. Cellucci et alii (eds.), *Temi e prospettive della logica e della filosofia della scienza contemporanea,* CLUEB, 1988, vol. II, 117-120.

[12] Tra le cinque presentazioni della geometria iperbolica da parte di

N.I. Lobacesvkij la più semplice e interessante è *Geometrische Untersuchungen der Theorien der Parallellinien*, Finkl, Berlin, 1840 (trad. it. in S. Cicenia e A. Drago: *La teoria delle parallele*, Danilo, Napoli, 1996, p. 43-96).
[13] A. Drago, "Che senso hanno le teorie matematiche insegnate?", *Matematicamente nn. 129 – 130 luglio-agosto 2008, ed. Mathesis VR,* ISSN 2037-6367.
[14] "La tradizionale didattica della matematica tra astrattismo e strumentalismo", *Riv. Epistemologia Didattica*, 3, (2008) n. 5-6, 141-162.

[*] Università degli Studi di Pisa, e-mail: drago@unina.it

Equazioni parametriche di una quartica bicircolare

di Nazario Magnarelli [**]

Prima parte

Si dimostra che la quartica di equazione

C^4: $(x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)-4y^2+5x^2=0$ (1)

è razionale e se ne trova le equazioni parametriche.

Si vede subito che la C^4 è simmetrica rispetto all'asse x e che essa passa per i punti P(0, 2) e P'(0, –2). La (1) ci dice anche che l'origine O(0, 0) è un punto doppio nodale con tangenti principali di equazioni $y = (\sqrt{5})\,x/2$ e $y = (-\sqrt{5})\,x/2$. Intersechiamo la curva con una delle due tangenti nell'origine O, es.: $y = (\sqrt{5})\,x/2$. Si ottiene:

$$\left(x^2+\frac{5}{4}x^2\right)^2-4x\left(x^2+\frac{5}{4}x^2\right)=0\,,\qquad \frac{81}{16}x^4-9x^3=0\,, \tag{2}$$

infine

$x^3(9x-16) = 0$. (3)

La (3) ci dice che la tangente $y = (\sqrt{5})x/2$ ha 3 intersezioni con la C^4 nell'origine O; ma di queste 3 intersezioni, 2 sono assorbite nel punto di tangenza con un ramo della C^4, la terza è dovuta al punto di intersezione della tangente con l'altro ramo del cappio passante per il nodo O, che pertanto è un nodo ordinario.

Studiamo ora i punti impropri della quartica.

Passiamo a coordinate omogenee (x, y, z) e intersechiamo con la retta impropria $z = 0$. Si vede subito che questa retta ha due intersezioni con la C^4 in ognuno dei due punti ciclici $I_1(1, i, 0)$ e $I_2(1, -i, 0)$. Facciamo vedere che essi sono punti doppi e che quindi la quartica è bicircolare. Infatti, intersecando la curva con la generica retta isotropa $y = ix + h$ passante per il punto I_1 vediamo che l'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi per qualsiasi valore complesso di h. La stessa conclusione possiamo dire per il punto $I_2(1, -i, 0)$; quindi i punti ciclici sono punti doppi. Le intersezioni della C^4 con la retta isotropa $y = ix + h$ diventano esattamente tre per i valori di h che risultano radici dell'equazione: $4h^2 + 8ih - 9 = 0$. (4)

Concludiamo che i punti ciclici $I_1(1, i, 0)$, $I_2(1, -i, 0)$, sono nodi ordinari.

Tomaso Millevoi, dell'Università di Padova, ci ha informati che quando i punti doppi di una C^4 sono i punti ciclici del piano e l'origine O delle coordinate, possiamo trovare le equazioni parametriche della curva per mezzo di una trasformazione per raggi vettori reciproci, cioè con la trasformazione

$x = X/(X^2 + Y^2)$, $y = Y/(X^2 + Y^2)$ (5)

Seguiamo i suoi suggerimenti. Sostituendo nella (1) si ha:

$$[X^2/(X^2+Y^2)^2 + Y^2/(X^2+Y^2)^2]^2 +$$
$$-4(X/(X^2+Y^2))[X^2/(X^2+Y^2)^2 + Y^2/(X^2+Y^2)^2] +$$
$$-4(Y^2/(X^2+Y^2)^2 + 5(X^2/(X^2+Y^2)^2 = 0.$$

Con un'evidente semplificazione abbiamo:

$$\frac{1}{(X^2+Y^2)^2}-4\frac{X}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{5X^2-4Y^2}{(X^2+Y^2)^2}=0\,. \tag{6}$$

Riducendo a forma intera si ha:

$5X^2 - 4Y^2 - 4X + 1 = 0$. (7)

La curva trasformata (7) è un'iperbole che passa per il punto $P(0; ½)$. Troviamo le equazioni parametriche della conica intersecandola con il fascio di rette proprio di centro P. Si ha il sistema

$$\begin{cases} 5X^2-4Y^2-4X+1=0 \\ Y = tX + 1/2\ . \end{cases} \tag{8}$$

Sostituendo, dopo qualche passaggio si ha:

$(5 - 4t^2)X^2 - 4(t+1)X = 0$. (9)

La (9) ha le radici $X = 0$ (che non interessa) e $X = (4t + 4)/(5 - 4t^2)$.

Sostituendo in $Y = tX + 1/2$ si ottiene:

$Y = t(4t + 4)/(5 - 4t^2) + 1/2 = (8t^2 + 8t + 5 - 4t^2)/2(5 - 4t^2)$ (10)

Le equazioni parametriche dell'iperbole (9) sono quindi:

$X = (4t + 4)/(5 - 4t^2)$, $Y = (4t^2 + 8t + 5)/2(5 - 4t^2)$ (11)

Sostituendo nella (5_1) della trasformazione per raggi vettori si ha:

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2}=\frac{4t+4}{5-4t^2}:\left[\frac{(4t+4)^2}{(5-4t^2)^2}+\frac{(4t^2+8t+5)^2}{4(5-4t^2)^2}\right],$$

e semplificando e sistemando si ha:

$$x(t)=\frac{(16t+16)\cdot(5-4t^2)}{4(4t+4)^2+(4t^2+8t+5)^2}\,. \tag{12}$$

La (12) ci dà l'espressione parametrica razionale della coordinata $x(t)$. Avendo già trovato le equazioni parametriche $X(t)$ e $Y(t)$ dell'iperbole [si ricordino le (11)], possiamo ora trovare anche l'ordinata y della nostra C^4 in funzione del parametro t.

Ricordando la (5_2) si ha:

$$y=\frac{Y}{X^2+Y^2}=\frac{4t^2+8t+5}{2(5-4t^2)}:\left[\frac{(4t+4)^2}{(5-4t^2)^2}+\frac{(4t^2+8t+5)^2}{4(5-4t^2)^2}\right] \tag{13}$$

e quindi

$$y(t)=\frac{(10-8t^2)\cdot(4t^2+8t+5)}{4(4t+4)^2+(4t^2+8t+5)^2}\ . \tag{14}$$

Riassumendo i dati trovati, possiamo dire che le equazioni parametriche della C^4 sono:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{(16t+16)\cdot(5-4t^2)}{4(4t+4)^2+(4t^2+8t+5)^2} \\ y(t)=\dfrac{(10-8t^2)\cdot(4t^2+8t+5)}{4(4t+4)^2+(4t^2+8t+5)^2}\,. \end{cases} \tag{15}$$

Con l'aiuto del programma «Derive», possiamo ora tracciare il grafico della nostra curva C^4: si veda figura 1 [eseguire i seguenti comandi: crea, vettore = 2, espressioni di $x(t)$ e di $y(t)$].

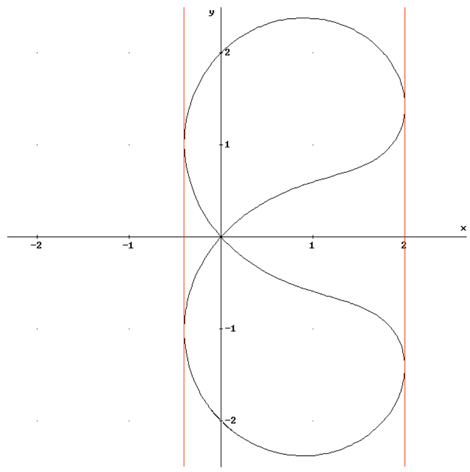


Fig. 1

Questo grafico è simmetrico rispetto all'asse x, come già ci dice l'equazione (1) della quartica; esso ci mostra anche che le rette $x = 2$ e $x = -2/5$, parallele all'asse y del riferimento cartesiano, potrebbero essere due rette bitangenti alla C^4.

Proviamo algebricamente che ciò è vero. Intersechiamo la C^4 con la generica parallela all'asse y. [*Segue al numero* 186]

[**] Socio Mathesis di Latina