ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 187 – Pubblicato il 31 – 03 – 2014

«Terribilis est locus iste»

di Luciano Corso

Sogno. Mi muovo in un luogo terribile e, al tempo stesso, degno di rispetto. Sono su una navicella spaziale ad assetto variabile con misure che possono andare dalle dimensioni di un quark a quelle di un'enorme galassia. Ora è puntiforme per un osservatore esterno, per me, invece, è comodissima. Con essa viaggio in un universo strano, pieno d'imbrogli. Sparsi, non lontano da me, vedo cinque punti e, intorno, il vuoto: un abisso privo di ogni senso, il separatore di ogni cosa. Mi avvicino per cercare di capire. Questo mondo è isolato, costituito da un insieme di pochi punti, finito e, io, dall'esterno lo osservo e lo posso percorrere. Non ci sono ordinamenti predefiniti di questi punti; a controllarli bene, sono indistinguibili, se non per la posizione occupata nello spazio. Che posso fare? Do un nome a questi punti; è ragionevole lasciare un segno diverso su ciascuno di loro e li raggruppo in un insieme. Chiamo X questo insieme e con le prime lettere dell'alfabeto i punti che vi appartengono: $X = \{a, b, c, d, e\}$.

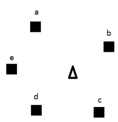

Fig. 1. Solo 5 punti in questo spazio e … tanta fantasia

La cardinalità di questo insieme è $|X| = 5$ e, dal calcolo combinatorio, so che con 5 elementi distinti si possono costruire $2^5 = 32$ sottoinsiemi distinti lunghi 5 al massimo. Ogni raggruppamento rappresenta un'originalità e l'insieme di questi sottoinsiemi è l'insieme potenza (o insieme delle parti) di X. Eccolo:

$$
\begin{array}{lllllll}
P_X = \{ & \{\ \} & \{a, b, c, d, e\} & \{a\} & \{b, c, d, e\} & \{a, b\} & \{c, d, e\} \\
 & & & \{b\} & \{a, c, d, e\} & \{a, c\} & \{b, d, e\} \\
 & & & \{c\} & \{a, b, d, e\} & \{a, d\} & \{b, c, e\} \\
 & & & \{d\} & \{a, b, c, e\} & \{a, e\} & \{b, c, d\} \\
 & & & \{e\} & \{a, b, c, d\} & \{b, c\} & \{a, d, e\} \\
 & & & & & \{b, d\} & \{a, c, e\} \\
 & & & & & \{b, e\} & \{a, c, d\} \\
 & & & & & \{c, d\} & \{a, b, e\} \\
 & & & & & \{c, e\} & \{a, b, d\} \\
 & & & & & \{d, e\} & \{a, b, c\}\ \}.
\end{array}
$$

Ho ampliato il mio mondo, ma l'ampliamento è puramente teorico; quel mondo rimane sempre di 5 punti. Questi 32 insiemi di P_X sono ciò che è possibile distinguere nella costruzione di insiemi a partire dagli elementi di X (nel seguito, userò indistintamente i termini "punti", "oggetti" e "elementi" con riferimento alle parti di X). Da cinque punti, mi accorgo che con una semplice operazione di separazione si possono ottenere 32 insiemi: i punti sono 5 ma con la mia immaginazione posso costruire 32 gruppi di punti distinti. Con il mio *Challenger* tocco il punto b e atterro e scopro che sono in uno dei 5 punti di questo spazio limitato, ma che posso pensare di essere approdato in uno dei 16 gruppi che contengono il punto b. Di fatto non so quale di questi 16 gruppi sia quello che mi ospita perché non sto vedendo nulla intorno a me. Con un appropriato strumento ottico presente nella navicella guardo dall'oblò e vedo che, in realtà mi trovo nell'insieme $\{b, c, d\}$. Vedo, infatti, vicini i punti c e d e null'altro. È naturale pensare che da qualche parte, lì intorno, si trovi il gruppo complementare $\{a, e\}$.

È strana la vita, mai avrei pensato un'immersione in uno spazio discreto così ridotto. Gli uomini pensano in grande, si credono immortali e ritengono di occupare uno spazio infinito e si alimentano d'idee pericolose rincorrendo concetti che spesso fanno capitombolare la mente, come l'eternità. Qui tutto fa pensare al contrario: non solo questo mondo è limitato, non solo è finito, non solo è discreto, ma è anche piccolo, costituito da pochi punti. Se non fossi sulla mia navicella capace di muoversi in ogni direzione a ogni istante e fuggire via assorbita dal vuoto mi sentirei un prigioniero senza scampo attratto da questo mondo senza un "al di là". Mi fa paura anche il vuoto intorno, però, e non voglio finire in un nulla locale che riduce la speranza di incontrare qualcuno, qualcosa. Non so che fare, sono incerto.

Nella navicella c'è un contenitore cilindrico. Guardo dentro; ci sono oggetti strani: simboli matematici dai significati a me noti, costanti, variabili e altre cose ancora; un'attrezzatura primitiva ma essenziale, che odia la ridondanza. Ci vuole abilità per usare questi simboli e costruire formule ben formate. Estraggo dal contenitore due operatori: l'unione non disgiuntiva «$\cup$», l'intersezione «$\cap$»; per fortuna qualcuno li ha messi dentro il contenitore; sono una consolazione. Le loro proprietà sono note. Sappiamo che queste operazioni, applicate agli insiemi di P_X, danno ancora insiemi che appartengono a P_X. Mi piacerebbe che la regola valesse anche per qualche sottoinsieme di P_X. Non so che farmene di raggruppamenti di parti di X che non siano chiusi rispetto a «$\cup$», «$\cap$». Siccome sono io in questo sogno a decidere come regolare questi gruppi di punti scelgo che debba valere la chiusura. Ho bisogno di una definizione per orientarmi (le definizioni sono chiodi, punti di appoggio; un po' come le evidenze! (Poincaré)).

Dichiaro che una famiglia T di sottoinsiemi di X è una topologia su X se, $\forall\ X_i, X_j \in T$,

$$X \in T \quad \text{e} \quad \varnothing \in T \tag{1}$$

$$X_i \cup X_j \in T \quad \forall \quad i, j \tag{2}$$

$$X_i \cap X_j \in T \quad \forall \quad i, j\ . \tag{3}$$

Chiamo, inoltre, spazio topologico la coppia (X, T), cioè l'insieme X dotato della topologia T. L'insieme potenza di X, con le operazioni di unione e di intersezione, è una particolare topologia su X, che indico con T_1. Per definizione, affermo che questi insiemi sono insiemi aperti o anche T-aperti. Mi muovo, perciò, in uno spazio T-aperto.

Nel sogno, cerco di costruire un mio mondo. L'assetto variabile del mio *Challenger* mi permette una mobilità straordinaria. I costruttori di una macchina così sofisticata possono esistere solo nel mondo dei sogni. Tuttavia la fantasia, che solo un sogno può dare, non può cozzare contro l'organizzazione del pensiero: ordine e razionalità non possono mancare, per quanto sia diversa e fantastica la chiave di lettura delle cose che ci circondano. Che fare? Per ogni insieme discreto lungo n, con $n \in \mathbf{N}$, si possono ottenere diverse topologie. La più elementare è (X, T_0), con $T_0 = \{\varnothing, X\}$, e la più completa è (X, T_1), con $T_1 = P_X$. Ci sono, però, anche altre topologie. Eccone due:

$$T_2 = \{\varnothing,\ \ \{a\},\ \ \{c, d\},\ \ \{a, c, d\},\ \ \{b, c, d, e\},\ \ X\}$$

$$\mathrm{T}_3 = \{\varnothing,\ \ \{a\},\ \ \{a, b\},\ \ \{a, c, d\},\ \ \{a, b, c, d\},\ \ X\}.$$

Esse rispettano le condizioni (1), (2), (3). Altri insiemi generati da X possono non essere topologie. Per esempio, gli insiemi

$I_1 = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{c, d\},\ \{a, c, d\},\ \{b, c, d\},\ X\}$
$I_2 = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{c, d\},\ \{a, c, d\},\ \{a, b, d, e\},\ X\}$
$I_3 = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ X\}$

non lo sono. Si può notare che I_1 e I_3 non sono chiusi rispetto a «$\cup$», I_2 non è chiuso rispetto a «$\cap$». Si ha, infatti:

$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin I_1$,
$\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\} \notin I_2$,
$\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} \notin I_3$.

C'è un po' di disordine in questo spazio. Mi chiedo se i punti di P_X sono ordinabili e, più in generale, se, data una topologia, le sue parti lo sono. Rispetto alla relazione d'ordine «$\subset$», la collezione di tutte le topologie che si possono formare a partire da X è parzialmente ordinata. Date due topologie T_h e T_k confrontabili, allora dico che T_h è meno fine di T_k ($T_h \leq T_k$) se

$$\left(T_h \subset T_k\right). \tag{4}$$

Con riferimento alle due topologie T_2 e T_3 dico che esse non sono confrontabili; Inoltre, noto che T_2 è meno fine di T_1 ($T_2 \leq T_1$). È agevole verificare che le parti di P_X, prese a due a due, ammettono la relazione d'inclusione.

Punti di accumulazione (o punti limite)

La topologia esprime i concetti dell'analisi matematica in forme eleganti e generali, anche se a volte assai complesse. L'analisi matematica si fonda sugli assiomi di campo ordinato dei numeri reali. Qui, invece, l'astrazione arriva a livelli molto alti proprio per comprendere casi che altrimenti non si potrebbero considerare nell'usuale analisi del continuo. Uno di questi concetti è il cosiddetto *punto di accumulazione* (o *punto limite*) di un insieme. Do la seguente definizione di punto di accumulazione: Sia (X, T) uno spazio topologico. Un punto $x \in X$ si dice punto di accumulazione o punto limite di un sottoinsieme A generato da X se e solo se ogni insieme aperto G di T, contenente x, contiene almeno un punto di A diverso da x. Prendo i simboli che ho nel contenitore e mi viene da scrivere così:

$$x: \forall G((x\in G,\ G\in T,\ A\subset X) \Rightarrow ((\ G \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing)). \tag{5}$$

Normalmente, la verifica della comprensione della definizione si fa in $\mathbf{R}$. Pochi sono coloro che provano a verificare il concetto nel discreto. Dal mio *Challenger*, lo provo io, a partire dallo spazio topologico (X, T_2) e considerando il sottoinsieme $A = \{a, b, c\}$ di X. Osservo che A non appartiene a T_2. Valuto quali sono i punti di X che sono punti di accumulazione per A. Applicando la definizione (5) posso dire che il punto a non è punto limite di A dato che, in T_2, ci sono 3 aperti che contengono a ($\{a\}$, $\{a, c, d\}$ e X), ma solo 2 contengono un altro punto di A diverso da a; l'insieme aperto $\{a\}$, invece, non contiene un altro punto di A distinto da a. Passo al punto b di X. Correndo con lo sguardo su T_2, mi accorgo che gli aperti che contengono b sono 2: $\{b, c, d, e\}$, X; entrambi hanno punti di A distinti da b. Perciò b è punto limite per A. Passo al punto c di X. Se guardo T_2 vedo che c è presente negli aperti $\{c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d, e\}$, X. Ognuno deve avere almeno un punto di A distinto da c. Purtroppo il primo di questi aperti non rispetta la condizione e perciò c non è punto limite per A. L'analisi ora tocca al punto d di X. Guardo T_2 e vedo che d è contenuto negli aperti $\{c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d, e\}$, X. Ognuno di questi ha almeno un punto di A distinto da d, perciò d è punto di accumulazione per A. Infine, è la volta di e. Con la stessa procedura concludo che e è punto limite per A. L'insieme dei punti limite di un insieme A è detto insieme derivato. Nel nostro caso esso è dato da $A' = \{b, d, e\}$. Sempre con riferimento all'insieme A, vediamo di studiare i punti limite di A sulla topologia T_3. a non è punto limite di A, b è punto limite, c è punto limite, d è punto limite ed e lo è pure. In questo caso l'insieme derivato è $A' = \{b, c, d, e\}$. Per quanto detto, i punti isolati di una topologia non possono essere punti di accumulazione. Proseguo con il mio *Challenger* per altre mete concettuali: difficile sognare in grande con soli 5 punti! [*Segue al numero* 188]

Equazioni parametriche di una quartica bicircolare

di Nazario Magnarelli [*]

[*Segue dal n.* 186] Cerchiamo quindi il massimo di y^2, per trovare poi il massimo di y. A tale scopo basta eguagliare a zero la derivata prima di y^2 rispetto a x. Si ha:

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-x^2 + 2x + 2 + \left(-5x^2 + 8x + 4\right)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{(-2x+2)(\sqrt{-5x^2+8x+4}) + (-5x+4)}{\sqrt{-5x^2+8x+4}}. \tag{10}$$

Eguagliando a zero si ha:

$$(-2x+2)\sqrt{-5x^2+8x+4} = (5x-4)\ , \tag{11}$$

da cui: $(-2x + 2)^2 \cdot (-5x^2 + 8x + 4) = (5x - 4)^2$. Innalzando al quadrato si ha: $(4x^2 - 8x + 4) \cdot (-5x^2 + 8x + 4) = 25x^2 - 40x + 16$.
Con facili calcoli si trova:

$$-20x^4 + 72x^3 - 93x^2 + 40x = 0\ , \tag{12}$$

e quindi

$$20x^3 - 72x^2 + 93x - 40 = 0\ . \tag{13}$$

Vediamo che questa equazione ha l'unica radice reale $x = 0{,}90335\ldots$ Si sostituisce questo valore di x in $-x^2 + 2x + 2 + (-5x^2 + 8x + 4)^{1/2}$ e si ottiene $y^2 = 5{,}663970$. Estraendo la radice quadrata, si trova $y_{max} \approx 2{,}379$ e quindi $y_{min} \approx -2{,}379$. Si conclude che si ha una retta, parallela all'asse x, tangente alla C^4 nel punto $S(0{,}9033;\ 2{,}379)$ e un'altra retta tangente nel punto simmetrico rispetto allo stesso asse.

Riflessione: Lo studio degli argomenti riguardanti le Matematiche Complementari è ormai superato; ma non si può negare che esso conservi, per molti studiosi, un particolare fascino.

[*] Socio Mathesis di Latina

INVICTUS

by William Ernest Henley (1849-1903)

Out of the night that covers me,
Black as the pit from pole to pole,
I thank whatever gods may be
For my unconquerable soul.

In the fell clutch of circumstance
I have not winced nor cried aloud.
Under the bludgeonings of chance
My head is bloody, but unbowed.

Beyond this place of wrath and tears
Looms but the Horror of the shade,
And yet the menace of the years
Finds and shall find me unafraid.

It matters not how strait the gate,
How charged with punishments the scroll,
I am the master of my fate:
I am the captain of my soul.

Questa stupenda poesia di Henley dai contenuti così profondamente umani nacque nel 1875 quando ancora l'autore non aveva compiuto 30 anni. Per una grave forma di tubercolosi ossea, gli venne amputata una gamba. La sua voglia di vivere e di reagire alla sorte si tramutò in un grido che solo gli uomini forti emettono in queste circostanze. La composizione pare che non riportasse un titolo; questo gli venne dato dal critico letterario Arthur Quiller-Couch che la incluse nella sua antologia della poesia inglese dal titolo Oxford Book of English Verse (1900).