ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 188 – Pubblicato il 03 – 05 – 2014

Il modo di ragionare di Evariste Galois sulla risolubilità delle equazioni algebriche in radicali

di Antonino Drago [1]

Sulla vita di Galois

Sulla tormentata vita di Galois (1811-1832) gli storici si dividono in due gruppi a seconda che (è la grande maggioranza) nella sua morte in un duello in cui egli aveva la pistola scarica si veda un complotto della polizia oppure (ad es. Toti Rigatelli 1996) un sacrificio volontario allo scopo di suscitare, mediante una manifestazione ai suoi funerali, una sollevazione popolare. Comunque tutti gli storici hanno visto solamente le sue relazioni con i matematici del tempo, più una relazione generica con il gruppo politico dei sansimoniani. Quindi, tuttora le ricostruzioni della sua vita e del suo ambiente sono parziali.

Sulla vita sociale di Galois ci sono molte aggiunte da apportare: 1) La lotta contro la scienza accademica francese, che caratterizza la vita di Galois, era nata ancor prima della rivoluzione francese, con l'Enciclopedia di Diderot e D'Alembert (Gillispie 1959). Durante la rivoluzione fu abolita l'Académie Royale des Sciences e furono create le istituzioni superiori alternative (Institut de France, Scuola Normale, Politecnico, ecc.). Dopo la rivoluzione c'è stata la Restaurazione, che fu anche restaurazione scientifica; in particolare ha restaurato la Académie e ha regolamentato alla maniera attuale la vita professionale degli scienziati (Ben-David 1975). Comunque quella lotta si è prolungata per vari decenni, per cui al tempo di Galois c'era l'Académie (composta da molti scienziati reazionari) e una rete di scienziati autonomi alternativi (Ben-David 1975, Redondi 1980). L'Académie di quel tempo ha resistito o combattuto le novità di molti scienziati (Lazare Carnot, Poncelet, Sadi Carnot, che scoprirono la legge della conservazione dell'energia, ecc.). 2) La teoria dei gruppi di Galois è stata preceduta 30 anni prima dalle teorie di Lazare Carnot (geometria, meccanica). Questi però era ricordato come il "regicida" di Luigi XVI per antonomasia, era stato scomunicato per aver diffuso in Francia le scuole a mutuo insegnamento e (come Napoleone) era stato proscritto dalla Francia (morì in Prussia). Quindi era l'innominabile; fu commemorato dall'Académie solo 15 anni dopo la sua morte (1837), assente Cauchy. 3) Galois apparteneva al gruppo dei sansimoniani, i quali erano molto legati ai Carnot. Il loro gruppo incominciò a riunirsi nella casa dei due figli di Lazare Carnot. La lettera di protesta (di Galois?) contro l'Académie venne pubblicata da *Le Globe*, il giornale del gruppo, che era stato fondato dal tipografo Leroux e dal teorico Hippolyte Carnot, secondo figlio di Lazare Carnot; quel giornale diffuse il principio di Lazare Carnot (abolizione dei titoli e dei beni ereditari per dare pari opportunità a tutti alla nascita), fatto che costituì l'inizio del socialismo in Europa (Lichteim 1970). 4) Anche il successivo matematico che nel 1840 trattò i gruppi (continui), Rodrigues, era molto impegnato nel gruppo sansimoniano. 5) In quel tempo molti grandi scienziati sono stati malati mentali per aver subito una emarginazione (politica e scientifica): Comte, Sadi Carnot, Mayer, Faraday; oppure sono stati ridicolizzati pubblicamente: Lobacevsky.

Sulla interpretazione degli scritti di Galois

Sulla nascita della teoria dei gruppi ci sono delle novità specifiche: 1) Cauchy ha dato un contributo solo laterale alla teoria dei gruppi (Dahan-Dalmedico 1980/81).
2) Già dal 1803 Lazare Carnot aveva introdotto il gruppo continuo dei moti spaziali con teoremi sulle proprietà definitorie (L. Carnot 1803 *a* e *b*) compresa quella dell'inverso (che poi verrà riconosciuta solo nel 1890 da Klein nella traduzione italiana del suo programma). Galois ha usato solo la parola "gruppo", senza indicare le sue proprietà definitorie (però ha introdotto la sua struttura e l'ha saputa utilizzare).
3) Nel 1840, prima della pubblicazione degli scritti di Galois da parte di Liouville (1844), anche Rodrigues ha trattato i gruppi continui (Gray 1980).

La maniera moderna di trattare "la teoria dei gruppi di Galois" è quella di considerare prima i campi (cioè gli strumenti di calcolo) e poi i loro automorfismi (cioè i gruppi e le simmetrie). Questa non è la maniera con cui Galois li ha introdotti. Gli scritti di Galois ammettono più ricostruzioni (Neumann 1986). Le più accurate sono quelle di Edwards (1984 e internet 2012) e di Radloff (2002); la più leggibile è quella di Wussing (1984). Ciascuna delle teorie di Lazare Carnot e quella del figlio Sadi (termodinamica) è basata su un problema. Anche la teoria di Galois è chiaramente basata su un problema: la risolubilità delle equazioni algebriche in radicali.

Lazare Carnot riconobbe la genialità caratteristica della analisi infinitesimale nell'introduzione della "*aggiunta*": l'analisi introduce nel sistema matematico dato una *aggiunta* al fine di rendere più semplice la ricerca della soluzione del problema; una volta trovata la soluzione, si elimina l'*aggiunta* in qualche modo e così si torna al sistema iniziale con la soluzione desiderata. O anche, l'analisi, usando in quel tempo gli infinitesimi, introduceva il dx (idealizzato con capacità mitiche) per ottenere risultati nuovi (ad es. la derivata, cioè la tangente a una curva) e poi la sopprimeva (malamente). Carnot ha accettato questo metodo, ma lo ha riproposto utilizzando aggiunte senza mitizzazioni, in termini di soli calcoli operativi. Di fatto in ogni teoria dei Carnot c'è una specifica *aggiunta*; nella meccanica quella dei "moti geometrici" che lui dimostra formare un gruppo. Anche per Galois il concetto della "*aggiunta*" è fondamentale, tanto che scrive quella parola a lettere maiuscole. Nella sua teoria però *le aggiunte sono due*: una è quella dei radicali, che ampliando il campo dei numeri di riferimento semplificano la ricerca della soluzione riducendo l'equazione data ad una di grado inferiore; l'altra aggiunta è quella del gruppo delle permutazioni e anch'essa facilita la soluzione indicando i sottogruppi fattori, fino a quello dell'identità. Si noti che questa seconda aggiunta è più complessa dell'altra, perché porta a studiare i diversi sottogruppi del gruppo iniziale. Comunque il problema della risolubilità delle equazioni viene risolto in modo tale che la risposta finale non fa riferimento alle aggiunte.

Pochi storici (ad es. Alperin 1978) hanno notato bene che il lavoro di Galois è stato quello di trovare il collegamento tra due percorsi paralleli di ragionamento; quello sui sistemi di numeri (campi), ampliati con l'aggiunta dei radicali, e quello sul gruppo delle permutazioni e i suoi sottogruppi. Cioè, Galois è riuscito a unire tra loro due tecniche matematiche - il calcolo con le operazioni razionali e i gruppi di trasformazioni - che l'esperienza delle loro applicazioni in tutte le teorie fisiche finora costruite (Barut 1986) ha dimostrato essere complementari o opposte al punto da escludersi. *Quindi quello di*

Galois è un modo di ragionare del tutto nuovo, perché concilia due tecniche matematiche di per sé opposte.

In tutte le suddette teorie si ragiona con proposizioni doppiamente negate che non sono equivalenti alle corrispondenti affermative, perché queste mancano di evidenza operativa; perciò per esse non vale la legge della doppia negazione, il che è tipico della logica non classica. Di fatto, esse formano ragionamenti per assurdo. Queste due caratteristiche possono essere riconosciute negli scritti di Galois. In particolare è per assurdo (finisce con:«ciò che è contrario all'ipotesi») il teorema essenziale per collegare campi e gruppi, *il Lemma* III, detto oggi il *Teorema dell'Elemento Primitivo*. Quindi, a molti, gli scritti di Galois sono oscuri perché: 1) introducono una connessione che non si trova in altre teorie scientifiche (almeno fino al programma di Erlangen, che però la suggerisce senza esplicitarla) e 2) si svolgono in logica non classica, mentre invece si è soliti vedere teorie assiomatiche che sono sviluppate secondo la logica classica.

Questi nuovi elementi spiegano molto della "genialità" di Galois. Siccome però Galois non fu cosciente del tutto di queste sue novità, i suoi scritti lasciano ancora delle ambiguità; per cui una comprensione più dettagliata dei suoi lavori richiederebbe la loro ricostruzione razionale a partire dal *Lemma* III.

Applicazione alla didattica

Ovviamente non è possibile riportare nelle scuole superiori il metodo di Galois che fa interagire i campi con i gruppi sul tema delle equazioni algebriche. Però, l'idea base della aggiunta non è difficile e anzi c'è da meravigliarsi che non sia stata finora utilizzata. L'aggiunta è anche la x, o «cossa» (come veniva chiamata i primi tempi, cioè la cosa, così come nel linguaggio si chiama ciò che non si sa denominare). I Romani si scervellavano su problemi del tipo: Quanto pesa un mattone che pesa cinque terzi di un blocco di marmo di due chili meno il peso di un quarto di mattone? Risolvere a mente questo problema è difficile perché si deve cercare un numero che sta anche tra i dati del problema. Ma se si introduce la "cossa", x, e la si assoggetta alle regole di calcolo degli altri numeri si ha $x = (5/3)\cdot 2 - (1/4)\cdot x$ e si ottiene il risultato con due passaggi: 8/3 Kg. In realtà, nella storia della matematica questa maniera di trovare soluzioni a problemi difficili è iniziata dal tempo degli indiani quando essi inventarono lo zero. Prima una sottrazione (con i riporti) era un problema serissimo, come pure una moltiplicazione o una divisione. Dopo, è diventata una "tecnicuzza" da prime classi della scuola elementare. Perché non far soffermare la mente di tutti i giovani delle scuole superiori su questa capacità di creare soluzioni, capacità che essi hanno sperimentato ma solo inconsciamente?

Collegamento culturale con la nonviolenza

Per di più l'«*aggiunta*» dà un legame straordinario con la vita sociale per la risoluzione dei conflitti. Kant ha indicato il superamento dell'inconoscibilità del noumeno in un atto etico che appunto ha chiamato *aggiunta*. Hegel l'ha trasfigurata in un atto trascendente dello Spirito Assoluto (*Aufhebung*). Invece il primo nonviolento europeo, Aldo Capitini, ha ripreso quella parola scartando il significato metafisico di Hegel; piuttosto egli ha indicato con essa l'azione tipica di qualcuno che vuole risolvere nonviolentemente un conflitto. Indipendentemente da lui, il teorico nonviolento vivente, Johan Galtung, le dà lo stesso senso e la esemplifica con un famoso racconto arabo:« Un padre muore e lascia ai 3 figli l'eredità di 17 cammelli: 1/2 al primo, 1/3 al secondo e 1/9 al terzo. Non sapendo come dividere i cammelli in quelle frazioni, i figli si stanno per litigare quando passa un *mullah* a cui essi chiedono consiglio. Questi scende dal suo cammello, lo mette con gli altri ed esegue le operazioni: 18/2=9, 18/3=6, 18/9=2; così fa risultare le tre parti ereditarie: 9+6+2=17; rispetto ai 18 avanza il suo cammello; lo riprende e se ne va». In questo caso (di una somma che non dà il 100% del totale) un'*aggiunta* intelligente ha risolto tutto l'imbroglio. Si può dire analogamente che, quando c'è un conflitto, è per l'apparente mancanza di una soluzione intelligente che si va alle mani o alla guerra. Troppe volte la soluzione razionale c'era e non ce ne siamo accorti: si trattava di *aggiungere* alla situazione data qualcosa che in termini umani può significare qualche volta un semplice sorriso e in altri un lavoro di ricostruzione dell'intera personalità altrui (Freud ricostruisce la personalità del paziente facendogli *aggiungere* la comprensione dei suoi sogni, con i quali si spiega il trauma da lui subito e la maniera di superarlo (Drago 2012)). Questo collegamento semplice con filosofia, psicoanalisi e teoria della risoluzione dei conflitti può essere un grande avanzamento della cultura scolastica degli studenti in genere e degli stessi insegnanti, che all'Università hanno appreso (semmai) queste nozioni in maniera molto complessa.

Riferimenti bibliografici: [1] J.L. Alperin: "Groups and Symmetry", in L.A. Steen (ed.): Mathematics Today, Springer, New York, 1978. [2] A.O. Barut: "Dynamics and symmetry: Two distinct methodologies in theoretical physics" in B. Gruber, R. Lenczewski (eds.), Symmetry II, Plenum P., New York, 1986, pp. 37-50. [3] L. Carnot a: Géométrie de Position, Duprat, Paris, 1803. [4] L. Carnot b: Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement, Deterville, Paris, 1803. [5] J. Ben David: Scienza e società: uno studio comparato del ruolo sociale dello scienziato, Il Mulino, Bologna 1975. [6] A Dahan-Dalmedico: "Les travaux de Cauchy sur les substitutions: étude de son approche du concept de groupe", Arch. Hist. Exact Sci., 23 (4) (1980/81), pp. 279-319. [7] A. Drago: "Nonviolenza e scienza (la psicanalisi, la logica e la fisica)", in AA. VV.: Nonviolenza e mondo possibile, Ed. Piagge, Firenze, 2011, 37-59; e anche in Polemos n. 33 (internet) e in Inchiesta online 10 genn. 2013. [8] H.M Edwards: Galois Theory, Springer, New York, 1984. [9] H.M. Edwards: "Galois' version of Galois' theory", in internet http://www. galois.ihp.fr/wp-content/uploads/2011/12/H.-Edwards.pdf 2012. [9] E. Galois: Oeuvres mathématiques d'Évariste Galois, Gauthier-Villars, 1962. [10] C.C. Gillispie: "The Encyclopédie and the Jacobin Philosophy of Science: A Study In Ideas and Consequences" in M. Clagett (ed): Critical Problems in the History of Science, Univ. Wisconsin P., Madison, 1959, pp. 255-289. [11] J. Gray: "Olinde Rodrigues' paper of 1840 on transformation groups", Archive for History of Exact Sciences, 21 (1980), pp. 375-385. [12] K. Klein: "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti", Annali mat. Pura e appl. (2) 17 (1890), 307-343 (trad. di G Fano). [13] G. Lichteim: Le origini del socialismo. Bologna, Il Mulino 1970. [14] P.M. Neumann: "Review" di H.M. Edwards: Galois Theory, Springer, New York, 1984, in Am. Math. Monthly, 93 (1986) pp. 407-411. [15] P. Redondi: L'accueil des idées de Sadi Carnot. J. Vrin, Paris, 1980. [16] J. Radloff: "Evariste Galois: Principles and Applications", Historia Mathematica, 29 (2002) pp. 114-137. [17] L. Toti Rigatelli, La mente algebrica. Storia dello sviluppo della teoria di Galois nel XIX secolo, Bramante, Busto Arsizio, 1989. [18] L. Toti Rigatelli, Évariste Galois, Birkhauser, Basel, 1996.

[1] già dell'Università di Napoli "Federico II" - drago@unina.it.
Il lavoro è stato presentato al Congresso Nazionale della MATHESIS tenutosi a Spoleto in aprile del 2014

«Terribilis est locus iste»

di Luciano Corso

[*Segue dal n.* 187] **Insiemi aperti, chiusi, frontiera, intorni**

I concetti, spesso, si sovrappongono e lasciano amarezza, impediscono distinzioni di genere e specie ed è un guaio. Così è in filosofia, nella vita, in matematica. Muovendomi con la mia navicella spaziale in questo strano spazio, finora di 5 punti (scrivo "finora" perché è ciò che sto sognando e vedendo), ho dovuto usare il concetto d'insieme aperto in modo primitivo, per necessità. Se non lo avessi fatto non avrei potuto costruire granché (avrei potuto partire da altri punti di vista, ma è sempre meglio contenere la fantasia). Ho, perciò, pensato che gli insiemi contenuti in T sono, per definizione, insiemi aperti. Ora sto grippando e ho bisogno di ripensare alcune cose. Che significa insieme aperto? Basta esprimerlo perché lo sia davvero? «Aprire» e «chiudere» sono due verbi che descrivono azioni complementari. Ciò che è aperto, non può essere chiuso e viceversa. È possibile credere che un insieme aperto sia anche un chiuso? Mi ricordo un detto di un saggio Taoista:«Non credete a ciò che pensate». M'impressiona: molte volte è vero. [*Segue al n.* 189]