ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel.ni (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 189 – Pubblicato il 10 – 06 – 2014

La mano di quel topologo con dito puntato verso di me

«…Terribilis est locus iste»

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 187]

Insiemi aperti, chiusi, frontiera, intorni

Ogni definizione, se spinta al massimo, presenta una sua criticità (anche per le macchine vale la regola). In generale, la definizione d'insieme aperto prevede, a sua volta, la definizione di punto interno di un insieme (così mi dice l'istinto). Che differenza c'è tra "aperto" e "intorno"? Mi ricordo che alcuni scrissero che non c'è ambiguità in questi concetti [B.3, 4]. Il termine "intorno" indica che c'è qualcosa di vicino a un oggetto: ciò che sta intorno a me è ciò che posso osservare con i miei sensi e che posso raggiungere; è ciò che sta nelle vicinanze. Così, il concetto afferisce a un insieme di elementi (punti) vicini a un elemento che appartiene, esso stesso, all'insieme. Il termine "aperto", invece, ha un'accezione differente. "Aperto" è uno spazio che, pur avendo confini, non si sentono (nel senso del percepire). A me l'aggettivo "aperto" assegnato a un insieme fa pensare che sia possibile valicarne i confini. Gli elementi che si muovono dentro un insieme aperto sembrano poter andare ovunque senza trovare barriere. Invece non è così: se un insieme è aperto allora mi posso muovere solo al suo interno. "Aperto", però, è anche una proprietà comune di un insieme di punti, senza riferimenti a un punto privilegiato. È vero? Riesce difficile, in questo caso, trovare un collegamento con il concetto di "vicinanza". Un "aperto", comunque, deve avere qualcosa d'interno e qualcosa di esterno, altrimenti perché distinguerlo da altri insiemi? A pensarci bene, però, è così anche per l'insieme chiuso. La mia rotta, ora, deve seguire il filone delle definizioni: quali, se faccio fatica a pensarne in questo mondo di 5 punti?

Quando siamo in uno stato di necessità, abbiamo l'obbligo di scegliere ciò che è più conveniente per noi. Questa è una buona regola; è una regola utilitaristica. Mi ricordo che De Finetti dava una grande importanza alla funzione di utilità [B.7], tanto da costruire su di essa il concetto stesso di probabilità soggettiva (inerente al prezzo (utilità secondo il mercato, appunto) da pagare per ricevere 1, in futuro, se un certo evento si fosse verificato e 0 altrimenti). Anche Von Neumann ebbe una forte propensione a giustificare il concetto di probabilità con l'idea di utilità [B.6]. Prima ancora, C. Darwin dichiara che la variabilità genetica in un individuo permane e si trasmette solo se è utile [B.8]. Insomma, la prima scelta orienta verso una serie di definizioni utili, che almeno faccia corrispondere gli oggetti che osserviamo a concetti chiari e utilizzabili più volte senza contraddizione. Chissà perché questo termine (contraddizione) mi ricorda sempre i miei rapporti con le donne: non sono mai riuscito con loro a essere lineare, coerente, sereno. Sono sicuro che, se per caso dovessi trovare qualcuno in questo vuoto, questo qualcuno sarà una donna (Che guaio: con le donne, alla fine, faccio sempre casino!). Intanto, cerco una dritta.

Dato un insieme A, generato da X, si dice che x, con $x \in X$, è punto interno di A se $x \in A$ ed esiste un insieme aperto G di T contenuto in A, tale che x appartiene a G; in simboli: $x : x \in G \subset A$. [B. 5]. Appendo a un gancio l'arnese. All'interno della mia navicella ce ne sono tanti. Non vorrei, però, che a forza di appendere arnesi a questi ganci rischiassi di avere pareti tappezzate di arnesi, con una grande confusione visiva! La linguistica simbolica è pesante, ma dicono (i matematici, ben inteso) che faccia bene alla salute. L'insieme dei punti interni di A lo chiamo interno di A e scrivo $in(A)$. Noto che uso il concetto di aperto per definire quello di punto interno di un insieme. Ora dico anche che un insieme A è un "aperto" se è costituito solo da punti interni. Dalla definizione risulta che $in(A)$ è l'unione di tutti i sottoinsiemi aperti di A. Mi conviene subito definire anche il concetto di insieme chiuso e scelgo il percorso più facile: dico (a me stesso, ovviamente) che A è un insieme chiuso se e solo se il suo complementare, $\neg A$, è aperto. In generale, la chiusura di un insieme A generato da X, rispetto allo spazio topologico $\{X, T\}$ è l'intersezione di tutti i soprainsiemi chiusi di A; questa intersezione la indico A^{-}. Mi accorgo che ci sono punti che non sono né interni, né esterni a un insieme. Sono la frontiera dell'insieme: $Fr(A)$. Verifichiamo l'utilità di quanto definito considerando $A = \{a, b, c\}$ e lo spazio topologico $\{X, T_2\}$ (ricordo che $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $T_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$). Siccome gli insiemi di T_2 sono aperti (per definizione), allora i chiusi rispetto a T_2 sono: $\{X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}, \varnothing\}$. Noto che ci sono insiemi aperti di $\{X, T_2\}$ che sono anche chiusi: sono: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b, c, d, e\}$, X. Queste ambiguità non mi piacciono, ma non ne posso fare a meno, purtroppo. Inoltre, posso costruire da X, in T_2, insiemi che non sono né aperti, né chiusi; per esempio $\{a, b\}$ o $\{c, e\}$. Voglio ora vedere se A ha una chiusura e quale essa sia. Applico la regola appena detta e verifico che l'intersezione di tutti i chiusi che contengono A è $A^{-} = X$ e la frontiera è $Fr(A) = \{b, d, e\}$. Ma quest'ultimo insieme è proprio l'insieme derivato. In effetti, un insieme unito al suo derivato è sempre chiuso. Inoltre, per definizione, gli elementi di T_2 sono aperti e, quindi, costituiti solo da punti interni. Ho idee chiare sulla chiusura? Se sì, ciò va verificato. Dato lo spazio topologico $\{X, T_2\}$, desidero trovare la chiusura degli insiemi $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c, e\}$ e $\{a, b, c\}$. Considero i chiusi in $\{X, T_2\}$ (si veda poco sopra). La chiusura di $\{a\}$ è l'intersezione di tutti i soprainsiemi chiusi che contengono a; tale intersezione è $\{a\}$, come doveva risultare, dato che $\{a\}$ è anche chiuso. L'insieme $\{b\}$ ha come chiusura l'insieme $\{b, e\}$. L'insieme $\{c, e\}$ ha la chiusura $\{b, c, d, e\}$ e l'insieme $\{a, b, c\}$ ha chiusura X.

Ora ricordo che intorno a x ci devono essere anche altri punti e che il loro insieme deve essere almeno un aperto. Se voglio estendere il concetto, devo modificare l'idea. Allora penso che un intorno di $x \in X$ è un qualsiasi soprainsieme di un aperto che contiene x. In simboli, si dichiara che un intorno N di x rispetta la condizione:

$$N: (x \in X, G \in T_2) \Rightarrow (\exists N: x \in G \subset N). \qquad (6)$$

In particolare, N è un intorno di x se e soltanto se x è un punto interno di N. Da (6), è possibile verificare se $A = \{a, b, c\}$ è un intorno di qualche punto di X, data la topologia T_2? Vediamo: intanto penso che se A è un intorno di qualche punto, quest'ultimo deve appartenere ad A. Perciò A non può essere intorno di d ed e. Rimangono da analizzare i punti a, b, c. Osservo che A è intorno di a perché è un soprainsieme che contiene un aperto, $\{a\} \in T_2$, che contiene a. Invece, A non è intorno né di b, né c perché non esistono aperti in T_2 contenuti in A che abbiano i punti b e c come elementi. Pare che tutto quadri, anche se permangono delle ambiguità. È un sogno, peraltro, ciò che sto vivendo e nel sogno tutto è possibile e lecito (ci mancherebbe altro!): si può pensare di andare e non andare, di fare e non fare e altre contraddizioni ancora. Forse sarebbe bene stare fermi; non muoversi. Le cose accadrebbero lo stesso. Che mette in bocca William Shakespeare a Macbeth? «*If chance will have me King, why, chance may crown me without my stir*». Il caso induce a fermare ogni azione, rendendola superflua. La sorte, quasi, annulla il dovere di agire dell'uomo. Il fato è più forte di ogni pensiero positivo. Neppure gli dei hanno potere sul caso (Sofocle). Invece di seguire la saggezza di Shakespeare, che fa un cultore della matematica? Seziona, spacca, divide, rompe, frantuma, disgrega i concetti e ogni pensiero e poi sta male, molto male e, malgrado il suo sforzo ha bisogno di tanto in tanto di appendere qualche evidenza a sostegni sicuri e duraturi, a chiodi che non si staccano, a ganci; infine, però, vince sempre la sorte. Perché affannarsi, dunque, a fare chiarezza se questo mondo è oscuro per esperienza? Quante cose possiamo pensare nei sogni che dobbiamo stare attenti a dire nei congressi e nelle relazioni ufficiali. Tutto ciò è liberatorio. Mi abbandono al sogno, pertanto, e vado.

Insieme denso

Un sottoinsieme A di X in $\{X, T\}$ è denso rispetto a un insieme $B \subset X$ se $B \subset A^{-}$. Se $B = X$, allora A è denso in X. La definizione calza bene su ciò che conosciamo di $\mathbf{Q}$ e di $\mathbf{R}$. Ma io sono in uno spazio topologico con insieme generatore costituito solo da 5 punti. È lungi da me l'idea che si possa trovare un insieme denso in questo spazio. Tuttavia provo: $A=\{a, b, c\}$ è un insieme denso in X nello spazio $\{X, T_2\}$? La chiusura di A è A^{-} e $X \subset A^{-}$, perciò A è denso in X: incredibile! Se prendo l'insieme $\{b, d\}$ esso non è denso in X. Infatti $\{b, d\}^{-} = \{b, c, d, e\}$ che è diverso da X.

Raggruppamenti e topologie «fini» e «grossolane»

Quante distinte topologie possiamo avere, a partire da $X=\{a, b, c, d, e\}$? Possiamo contare i raggruppamenti distinti, ma non le topologie distinte. Dato un insieme generatore X di cardinalità $|X| = n$, il numero di raggruppamenti distinti che possiamo formare con gli elementi di X e che contengono X e l'insieme $\varnothing$ sono:

$$\left|W_n\right| = 2^{|P_X|-2} = 2^{2^n-2}, \qquad (7)$$

dove P_X è l'insieme potenza di X e W_n rappresenta l'insieme dei raggruppamenti possibili a partire da un n-insieme. Per induzione si dimostra la (7).

I raggruppamenti distinti di X sono, perciò, 2^{32-2}, cosa impensabile a prima vista. Troppe. Conviene ridurre la cardinalità di X per controllare meglio ciò che accade.

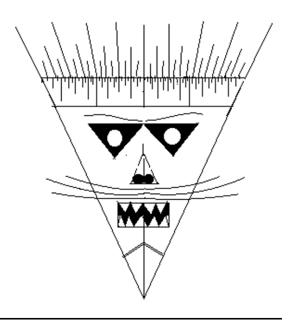

Fig. 1 (disegno di L.C.). Faccia del topologo, così come mi è apparsa in un recente sogno. Con un dito puntato verso di me, mi avvertiva: «Occhio: stai invadendo campi che non sono tuoi!» Non pensavo che i topologi fossero sostenitori della proprietà. Gli ho chiesto: «La topologia è geometria del particolare o analisi del minimo dettaglio?» Si è allontanato da me non degnandomi di uno sguardo.

Se consideriamo un insieme generatore di cardinalità inferiore, possiamo anche presentare i raggruppamenti possibili a partire da tale insieme. Supponiamo che $|X|=1$, cioè che X sia costituito solo da un elemento, $\{a\}$, allora i raggruppamenti e le topologie distinte sono 1: $\{\varnothing, X\}$. Ponendo W_{nj} il raggruppamento che si genera da X, ove n indica la cardinalità di X e j il numero d'ordine distintivo di ogni raggruppamento possibile, nel caso di $|X| = 1$ si scrive $W_{1,0}=\{\varnothing, X\}$. Se X fosse costituito da due elementi, $|X| = 2$, $\{a, b\}$, i raggruppamenti sarebbero 4: $W_{2,0} =\{\varnothing, X\}$, $W_{2,1}=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$, $W_{2,2}=\{\varnothing, \{a\}, X\}$, $W_{2,3}=\{\varnothing, \{b\}, X\}$. Se $|X| = 3$, cioè se, per esempio, $X = \{a, b, c\}$, i raggruppamenti con il vincolo della presenza di $\varnothing$ e di X, applicando la (7), sono 64. Non tutti questi raggruppamenti sono topologie. Sotto, sono presentati questi raggruppamenti e segnalati con il «sì» quelli che sono anche topologie. Chi mi segue senza farsi vedere (forse c'è qualcuno vicino a me?), verifichi le ragioni per cui gli altri raggruppamenti non lo sono.

$T_{3,0}$	=	{∅,							X},	sì
$T_{3,1}$	=	{∅,	{a},						X},	sì
$T_{3,2}$	=	{∅,		{b},					X},	sì
$T_{3,3}$	=	{∅,			{c},				X},	sì
$T_{3,4}$	=	{∅,				{a, b},			X},	sì
$T_{3,5}$	=	{∅,					{a, c},		X},	sì
$T_{3,6}$	=	{∅,						{b, c},	X},	sì
$W_{3,7}$	=	{∅,	{a},	{b},					X},	
$W_{3,8}$	=	{∅,	{a},		{c},				X},	
$W_{3,9}$	=	{∅,		{b},	{c},				X},	
$T_{3,10}$	=	{∅,	{a},			{a, b},			X},	sì
$T_{3,11}$	=	{∅,	{a},				{a, c},		X},	sì
$T_{3,12}$	=	{∅,	{a},					{b, c},	X},	sì
$T_{3,13}$	=	{∅,		{b},		{a, b},			X},	sì
$T_{3,14}$	=	{∅,		{b},			{a, c},		X},	sì
$T_{3,15}$	=	{∅,		{b},				{b, c},	X},	sì
$T_{3,16}$	=	{∅,			{c},	{a, b},			X},	sì
$T_{3,17}$	=	{∅,			{c},		{a, c},		X},	sì
$T_{3,18}$	=	{∅,			{c},			{b, c},	X},	sì
$W_{3,19}$	=	{∅,				{a, b},	{a, c},		X},	
$W_{3,20}$	=	{∅,				{a, b},		{b, c},	X},	
$W_{3,21}$	=	{∅,					{a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,22}$	=	{∅,	{a},	{b},	{c},				X},	
$T_{3,23}$	=	{∅,	{a},	{b},		{a, b},			X},	sì
$W_{,24}$	=	{∅,	{a},	{b},			{a, c},		X},	
$W_{3,25}$	=	{∅,	{a},	{b},				{b, c},	X},	
$W_{3,26}$	=	{∅,	{a},		{c},	{a, b},			X},	
$T_{3,27}$	=	{∅,	{a},		{c},		{a, c},		X},	sì
$W_{3,28}$	=	{∅,	{a},		{c},			{b, c},	X},	
$W_{3,29}$	=	{∅,		{b},	{c},	{a, b},			X},	
$W_{3,30}$	=	{∅,		{b},	{c},		{a, c},		X},	
$T_{3,31}$	=	{∅,		{b},	{c},			{b, c},	X},	sì
$T_{3,32}$	=	{∅,	{a},			{ a, b},	{a, c},		X},	sì
$W_{3,33}$	=	{∅,	{a},			{ a, b},		{b, c},	X},	
$W_{3,34}$	=	{∅,	{a},				{a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,35}$	=	{∅,		{b},		{ a, b},	{a, c},		X},	
$T_{3,36}$	=	{∅,		{b},		{ a, b},		{b, c},	X},	sì
$W_{3,37}$	=	{∅,		{b},			{ a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,38}$	=	{∅,			{c},	{ a, b},	{a, c},		X},	
$W_{3,39}$	=	{∅,			{c},	{ a, b},		{b, c},	X},	
$T_{3,40}$	=	{∅,			{c},		{ a, c},	{b, c},	X},	sì
$W_{3,41}$	=	{∅,				{a, b},	{ a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,42}$	=	{∅,	{a},	{b},	{c},	{a, b},			X},	
$W_{3,43}$	=	{∅,	{a},	{b},	{c},		{a, c},		X},	
$W_{3,44}$	=	{∅,	{a},	{b},	{c},			{b, c},	X},	
$T_{3,45}$	=	{∅,	{a},	{b},		{a, b},	{a, c},		X},	sì
$T_{3,46}$	=	{∅,	{a},	{b},		{a, b},		{b, c},	X},	sì
$W_{3,47}$	=	{∅,	{a},	{b},			{a, c},	{b, c},	X},	
$T_{3,48}$	=	{∅,	{a},		{c},	{a, b},	{a, c},		X},	sì
$W_{3,49}$	=	{∅,	{a},		{c},	{a, b},		{b, c},	X},	
$T_{3,50}$	=	{∅,	{a},		{c},		{a, c},	{b, c},	X},	sì
$T_{3,51}$	=	{∅,		{b},	{c},	{a, b},		{b, c},	X},	sì
$W_{3,52}$	=	{∅,		{b},	{c},	{a, b},	{a, c},		X},	
$T_{3,53}$	=	{∅,		{b},	{c},		{a, c},	{b, c},	X},	sì
$W_{3,54}$	=	{∅,	{a},			{a, b},	{a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,55}$	=	{∅,		{b},		{a, b},	{a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,56}$	=	{∅,			{c},	{a, b},	{a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,57}$	=	{∅,	{a},	{b},	{c},	{a, b},	{a, c},		X},	
$W_{3,58}$	=	{∅,	{a},	{b},	{c},	{a, b},		{b, c},	X},	
$W_{3,59}$	=	{∅,	{a},	{b},	{c},		{a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,60}$	=	{∅,	{a},	{b},		{a, b},	{a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,61}$	=	{∅,	{a},		{c},	{a, b},	{a, c},	{b, c},	X},	
$W_{3,62}$	=	{∅,		{b},	{c},	{a, b},	{a, c},	{b, c},	X},	
$T_{3,63}$	=	{∅,	{a},	{b},	{c},	{a, b},	{a, c},	{b, c},	X}	sì

Ci sono 29 topologie distinte, per almeno un elemento, tra questi raggruppamenti, generate a partire da $X=\{a, b, c\}$, contrassegnate con T_{nj} invece che con W_{nj}. [*Segue al numero* 190]

Riferimenti bibliografici: [B.1] Zamansky Marc, Introduzione all'algebra e all'analisi moderna, ed. Feltrinelli, Milano, 1976. [B.2] Rudin Walter, Principi di Analisi Matematica, ed. McGraw-Hill, Milano, 1991. [B.3] Rudin W., Analisi Reale e Complessa, ed. Boringhieri, Torino, 1974. [B.4] Barozzi G. Cesare e Matarasso S., Analisi Matematica 1, ed. Zanichelli, Bologna, 1986. [B.5] Lipschutz Seymour, Teoria e problemi di Topologia, collana Schaum – Etas libri, ed. Fabbri-Bompiani, Sonzogno, 1979. [B.6] Landenna G., Marasini D., Ferrari P., Probabilità e Variabili Casuali, ed. Il Mulino, Bologna, 1997. [B.7] De Finetti Bruno, Teoria delle Probabilità, Vol. I, ed. G. Einaudi, Torino, 1970. [B.8] Darwin C., L'origine delle specie, Bollati-Boringhieri, Torino, 2011.