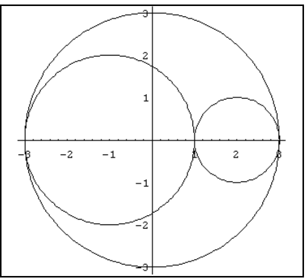
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail; lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 19 – luglio 1999



Punti razionali di curve algebriche

di Franco Nuzzi *

La ricerca dei punti razionali su una curva algebrica, dipende da principi comuni che sono al centro di numerosi problemi aritmetici. Fra questi, un esempio famoso è dato dal grande teorema di Fermat: $\forall n \in N$ n>2, non esistono numeri razionali (x, y) che risolvano l'equazione $x^n + y^n = 1$. Il caso più semplice è quello delle sezioni coniche quando la curva è espressa da una equazione polinomiale quadratica C(x, y) =0. Supponiamo di saper determinare le coordinate razionali (x_1, y_1) di un punto P appartenente ad una curva di questo tipo. Consideriamo poi il fascio di rette passante per P di equazione $y - y_1 = m (x - x_1)$ e intersechiamolo con la conica C(x, y)= 0. È facile esplicitare in termini del parametro m, le coordinate di un secondo punto di intersezione Q(x_2, y_2), ottenendo:

$$x_2 = \frac{A_1(m)}{A_2(m)}\, y_2 = \frac{A_3(m)}{A_4(m)},$$

dove $A_i(m)$, i=1..4 sono polinomi del parametro m. Ad esempio in questo modo è possibile ricavare tutti i punti razionali sulla circonferenza γ di raggio unitario: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ risolvendo il problema di Fermat per n = 2. E' facile determinare P(-1;0) $\in \gamma$ ottenendo pertanto il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = m(x+1) \end{cases}$$

da cui si ricava

$$(1+m^2)x^2 + 2m^2x + m^2 - 1 = 0 .$$

D'altra parte $x_1 + x_2 = - 2m^2 / (1 + m^2)$ e poiché $x_1 = -1$ si ha $x_2 = (1 - m^2) / (1 + m^2)$ e $y_2 = 2m /(1+ m^2)$.

Ora poiché m = y / (x +1) esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti del cerchio unitario con coordinate razionali (escluso il punto P(-1;0)) e i numeri razionali. La ricerca dei punti razionali si può applicare ad equazioni di curve più complesse, dette ellittiche, del tipo $y^2 = x^3 + ax + b$, in cui a e b sono razionali e il polinomio a secondo membro non possiede radici multiple. L'insieme dei punti razionali di una curva ellittica può essere munito di una struttura di gruppo commutativo [1], per cui, la ricerca dei punti razionali su tali curve costituisce un ponte tra la teoria algebrica e la geometria analitica: si parla allora di geometria algebrica in quanto possiamo analizzare le proprietà di una curva con strumenti puramente algebrici.

Bibliografia: [B.1] S. Lang, La Bellezza della matematica, Boringhieri, 1991.

* Socio Mathesis – Liceo Q. O. Flacco di Bari

«Il pensare matematico non è solamente un'occupazione altamente specializzata, ma anche parte del comune mestiere di vivere.» [Körner: B.4]

La filosofia della matematica nel dibattito contemporaneo nordamericano

di Pieranna Garavaso **

La filosofia della matematica costituisce il punto di incontro di diversi campi filosofici e, al tempo stesso, lo studio di un fenomeno che costituisce un punto di sutura fra una disciplina altamente tecnica e un insieme di conoscenze, regole e pratiche impiegate ordinariamente nel vivere di tutti i giorni. Nel dibattito contemporaneo viene data sempre maggiore importanza all'aspetto pratico della matematica, ovvero alla pratica della ricerca dei matematici o dell'applicazione della matematica nelle scienze quali la fisica, la biologia e l'informatica.

L'epistemologia, l'ontologia e la filosofia del linguaggio costituiscono suddivisioni tradizionali della filosofia; all'interno di esse si trattano quesiti specifici concernenti rispettivamente la conoscenza, l'ambito e la natura del reale e le modalità simboliche del linguaggio.

Lo studioso contemporaneo Hugh Lehman delinea alcune connessioni fra i problemi ontologici e quelli epistemologici in filosofia della matematica, nel dibattito contemporaneo Nordamericano: "[…] Parto dall'ipotesi che gli esseri umani che popolano il mondo contemporaneo siano dotati di vaste conoscenze matematiche e che tali conoscenze siano applicate diffusamente nelle loro varie attività scientifiche, artistiche e pratiche. Inoltre, parto dall'ipotesi che vi possa essere conoscenza solo se si abbia, come minimo, una credenza vera che sia completamente giustificata. […]. Da queste ipotesi concernenti la conoscenza, scaturiscono quesiti ontologici ed epistemologici piuttosto ovvi. Se si conoscono degli enunciati matematici, tali enunciati devono essere veri. E allora la questione ontologica che viene subito alla mente è questa: esistono entità matematiche? Dal punto di vista del senso comune, se un enunciato è vero, è perché ci sono delle entità che esistono indipendentemente da tale enunciato, che effettivamente possiedono le proprietà che tale enunciato attribuisce loro o che stanno in relazione l'una con l'altra così come l'enunciato asserisce. Questo, a sua volta, suggerisce che, dal momento che gli enunciati matematici sono veri, esistono entità grazie a cui tali enunciati sono veri. Il quesito ontologico è se vi siano o no tali entità e, in caso affermativo, quale sia la loro natura. Dal punto di vista epistemologico, la questione che balza alla mente riguarda come si giustifichino completamente le credenze matematiche. […] [B.1].

Un primo presupposto generalmente accettato concerne l'esistenza di un vasto dominio di conoscenze matematiche che gli esseri umani possiedono, si tramandano di generazione in generazione e che mettono ad utile profitto nelle più svariate attività. Il secondo presupposto concerne la cosiddetta analisi tradizionale della conoscenza. Questa teoria, che viene storicamente fatta risalire a Platone, asserisce che un soggetto *S* conosce un enunciato *p*, solo se (I) *S* crede che *p* sia vero (requisito della credenza od accettazione di un enunciato), (II) p è vero (requisito della verità dell'enunciato) e infine (III) S è pienamente giustificato nel credere che p sia vero (requisito della giustificazione). Nel brano citato, Lehman presuppone che, come minimo, la conoscenza matematica, di cui gli esseri umani sono dotati, soddisfi le tre condizioni date nell'analisi classica della conoscenza. Dopo aver rese esplicite queste premesse, Lehman ne deriva dei quesiti che concernono sia l'epistemologia, sia l'ontologia della matematica. Per capire come Lehman possa derivare tali quesiti, però, è necessario rendere esplicito l'argomento su cui Lehman si basa; esso è infatti un argomento tanto cruciale quanto controverso all'interno del dibattito in filosofia della matematica. Proponiamo di ricostruirlo come segue:

P1. *Vi è conoscenza degli enunciati matematici, ovvero gli esseri umani credono gli enunciati matematici [(I) è soddisfatto], sono pienamente giustificati nel credere tali enunciati [(III) è soddisfatto] e tali enunciati sono veri [(II) è soddisfatto].*

C1. *Da P1 segue che gli enunciati matematici (conosciuti) so-*

no veri.
P2. *Un enunciato è vero solo se di fatto esistono le entità di cui tale enunciato parla e se esse hanno effettivamente le proprietà e godono le relazioni che tale enunciato descrive.*
C2. *Da C1 e P2, ne consegue che esistono le entità grazie alle quali gli enunciati matematici sono veri.*

La prima premessa, che applica l'analisi classica della conoscenza al caso della conoscenza matematica, elenca le tre condizioni necessarie per avere effettiva conoscenza matematica. Da tale premessa deriva la prima conclusione, e cioè la tesi che gli enunciati matematici siano veri. Infatti se si presuppone l'effettiva esistenza di alcune conoscenze matematiche, e cioè che gli esseri umani siano pienamente giustificati nel credere alcune proposizioni matematiche vere, dal momento che, per il secondo requisito sopra citato, S conosce p solo se p è vero, ne consegue che tali enunciati sono veri. Sulla base di questo argomento, Lehman deriva quindi i due principali quesiti di cui si occupa la filosofia della matematica: il quesito ontologico, ovvero "Esistono le entità matematiche, e se sì, qual è la loro natura?" ed il quesito epistemologico, ovvero "Come fanno le credenze matematiche ad acquistare piena giustificazione?". In questo argomento, vengono menzionate tutte le tematiche fondamentali che sono state e sono ancora animatamente dibattute nella filosofia matematica: il problema della conoscenza matematica, il problema dell'esistenza e della natura delle entità matematiche e quello dell'interpretazione semantica del linguaggio matematico. I due primi temi sono proposti nei quesiti che Lehman deriva. Benché Lehman non lo menzioni esplicitamente, il problema semantico sottende necessariamente il quesito ontologico proposto, poiché è solo collegando il problema della verità degli enunciati matematici con il problema del riferimento dei termini numerici che in essi compaiono che si può derivare dalla verità degli enunciati matematici la necessità dell'esistenza delle entità matematiche descritte.

Bibliografia: [1] Lehman H., Introduction to the Philosophy of Mathematics, Totowa, NJ.: Rowman and Littlefield, 1979 – [2] Frege G., Die Grundlagen der Arithmetik - Eine logisch-matematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl, Koebner, Breslavia 1884 – [3] Garavaso P., Filosofia della matematica. Numeri e strutture, Milano, Guerini ed., 1998 – [4] Körner S., The philosophy of Mathematics, London,: Hutchinson University Library 1968
** Pieranna Garavaso è professore associato di filosofia presso l'Università del Minnesota a Morris - USA.

Sulla divulgazione scientifica

di Luciano Corso

Nel volume dal titolo "Le cinque equazioni che hanno cambiato il mondo" di Michael Guillen, docente e ricercatore di fisica e matematica dell'Università di Harvard - edizione Longanesi -, l'autore sostiene quattro punti salienti legati alla divulgazione scientifica.

1) Non è vero che la cultura scientifica non possa essere diffusa consistentemente nella società e nella scuola mediante un linguaggio semplice e accessibile al grande pubblico;
2) Alle soglie del 2000 è necessario capire che la cultura scientifica deve far parte del bagaglio di ogni persona colta ed istruita;
3) Vi è una impressionante equivalenza tra il massimo dell'espressione poetica e il massimo dell'espressione scientifico-matematica: così come la poesia risulta essere il massimo modo di esprimere sinteticamente l'introspezione umana, gli stati d'animo di fronte ai grandi temi dell'amore, della morte, del dolore, dell'ansia di sapere, del mistero della vita e del suo senso ultimo, le equazioni e le espressioni matematiche, quando sono sintesi profonde e generali degli stati di natura, visioni ermetiche cariche di significati cognitivi sullo stato del mondo, diventano il massimo modo di esprimere l'estrospezione umana e sono vere e proprie forme poetiche.
4) La matematica – lo si voglia o no – non è solo il linguaggio della scienza: è il linguaggio per eccellenza e lo sarà sempre più in futuro: tutti gli uomini dovranno apprenderlo per capire il senso delle scoperte scientifiche e esso costituirà prossimamente la base di riunificazione delle diverse lingue oggi esistenti al mondo.

L'ignoranza in campo scientifico non è più ammissibile. Quanto al termine "umanistico", solo se viene calato in un contesto completo di conoscenza può assumere il suo vero significato; solo là dove la cultura appare completa si può dimostrare ricca di quell'umanesimo integrale che ha fatto dell'uomo un essere speculativo grande, sottile e profondo. E voi che ne pensate?

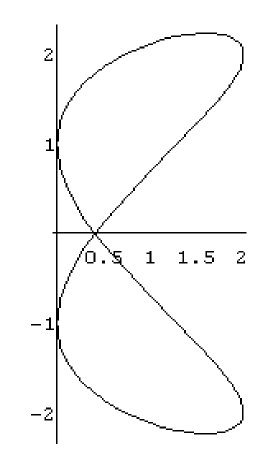
Parabola Virtuale

Al fiammingo Gregorio di S. Vincenzo (1584-1667) è dovuta la curva piana a lato (e il suo nome). Le sue coordinate parametriche sono:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot a \cdot cos^2(t) \\ y = 2 \cdot \left(a \cdot cos(t) + b \cdot sen(t)\right) \\ \{t : 0 \le t \le 2 \cdot \pi\} \end{cases}$$

Qui si è preso *a=1*, *b=0.5*.
Il nome deriva dalla proprietà di queste figure di trasformarsi in parabole, con opportune sezioni.

Bibliografia: Luciano Cresci, «Le curve celebri», Muzzio editore, Padova, 1998



Un limite notevole

di Arnaldo Vicentini

Nel numero 17 di questo foglio, ricavando la distribuzione normale come limite della binomiale abbiamo incontrato il limite famosissimo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{2^{2\cdot n} \cdot (n!)^2}{(2\cdot n)!} \right]^2 = \pi \qquad (1)$$

Un fatto curioso è che questo limite si trova in tutt'altro contesto. Posto, infatti:

$$J_r = \int_0^{\pi/2} sen^r(x) \cdot dx\,. \qquad (2)$$

calcolando J_0 e J_1 e integrando per parti per r>1, troviamo:

$$j_0 = \frac{\pi}{2};\quad j_1 = 1;\quad j_{r+1} = \frac{r}{r+1} \cdot j_{r-1};\quad j_{r+1} < j_r < j_{r-1}.$$

Di conseguenza:

$$j_{2n+1} = \frac{2\cdot n}{2\cdot n+1} \cdot \frac{2\cdot(n-1)}{2\cdot n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} j_1 = \frac{1}{2\cdot n+1} \cdot \frac{\left(2^n \cdot n!\right)^2}{(2\cdot n)!};$$

$$j_{2n} = \frac{2\cdot n-1}{2\cdot n} \cdot \frac{2\cdot n-3}{2\cdot(n-1)} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} j_0 = \frac{(2\cdot n)!}{\left(2^n \cdot n!\right)^2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$j_{2n-1} = \frac{2\cdot n+1}{2\cdot n} \cdot j_{2n+1} = \frac{1}{2\cdot n} \cdot \frac{\left(2^n \cdot n!\right)^2}{(2\cdot n)!};$$

$$\frac{j_{2n-1}}{j_{2n}} = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\left(2^n \cdot n!\right)^2}{(2\cdot n)!} \right]^2 \cdot \frac{1}{\pi} > 1;$$

$$\frac{j_{2n+1}}{j_{2n}} = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\left(2^n \cdot n!\right)^2}{(2\cdot n)!} \right]^2 \cdot \frac{2\cdot n}{2\cdot n+1} \cdot \frac{1}{\pi} > 1$$

$$\pi < \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\left(2^n \cdot n!\right)^2}{(2\cdot n)!} \right]^2 < \left(1 + \frac{1}{2\cdot n}\right) \cdot \pi > 1\,. \qquad (3)$$

Nella (3), per n=1, 2, 3, …, il termine centrale vale 4, 32/9=3.(5), 256/75=3.41(3)…: una successione decrescente tendente a π. Proviamo ora a sostituire n! e (2·n)! con i valori approssimati dati dalla formula di Stirling $k! \approx k^k\, e^{-k} \cdot \sqrt{(2\cdot k\cdot \pi)}$. A riprova della bontà della formula, per qualsiasi n trova sempre π.

Formula di Vandermonde

C'è una elegante dimostrazione di questa formula che si basa sul calcolo delle probabilità. Chi la conosce? La soluzione verrà data prossimamente.