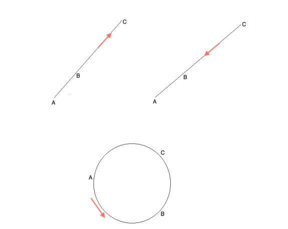
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 190 – Pubblicato il 02 – 07 – 2014



La Geometria Preassoluta

di Franco Rupeni [*] e Alessandro Zampa [**]

Abstract. Up to now elementary geometries, i. e. the Euclidean geometry, the hyperbolic geometry, the single elliptic geometry, and the double elliptic geometry, have been characterised by different and incompatible axiomatic systems, or have been only partially unified by means of extra-geometric tools such as the theory of real numbers, or group theory. The most important consequence is that, formally, it is impossible to compare them so as to answer even the simplest question concerning their differences or, more interestingly, to investigate structural relationships among primitive concepts and their properties. In this article we present a new axiomatic theory, Preabsolute Geometry, able to provide a unifying framework for all elementary geometries and give a complete answer to the "Three Points Problem", the "original sin" from which they emerged. Furthermore, Preabsolute Geometry sheds new light on Euclide's postulates, showing their crucial relevance to non-Euclidean geometry.

Nella plurimillenaria storia della geometria si possono individuare dei precisi momenti di cesura, vere e proprie rivoluzioni nel pensiero matematico. Tra i più rilevanti, quelli che intendiamo analizzare in questo articolo, si possono annoverare:

- la formulazione da parte di Euclide della teoria delle parallele (si veda in proposito la discussione in [1] al paragrafo I.11.3) che ha portato alla creazione della *geometria euclidea* riportata nel *Libro* I degli *Elementi*;
- la scoperta delle geometrie non-euclidee, la *geometria iperbolica* da parte di Lobačevskij e Bolyai e la *geometria ellittica* da parte di Riemann, approfondita da Klein;
- la sistemazione assiomatica iniziata da Pasch e proseguita da Hilbert e successori,

senza dimenticare tuttavia altre conquiste non meno importanti. Ebbene: è possibile confrontare queste diverse teorie? Si può stabilire se un dato enunciato riguardante punti e rette vale in tutte o meno? La risposta non è certo banale perché i concetti di punto e di retta non sono gli stessi nelle diverse geometrie: assiomi *differenti* caratterizzano concetti *differenti*, ragione per cui ogni enunciato ove occorrano i termini punto e retta esprime idee *differenti*. Su ciò Frege ammoniva Hilbert: «Un altro pericolo di carattere logico risiede, a mio parere, nel fatto che Lei dice, ad esempio, "assioma delle parallele", come se esso fosse lo stesso in ogni geometria particolare. Soltanto il testo è lo stesso; il pensiero in esso contenuto è diverso in ogni geometria.» La cruciale questione sarà trattata nel contesto assiomatico di una nuova geometria fondamentale la quale, a partire da una base comune ai concetti primitivi di punto, di retta e di piano, si specializza nelle differenti geometrie mediante assunzione di ulteriori specifici assiomi. Il genere più interessante di interrogativi che ci si può porre nel nuovo contesto, di carattere sovraordinato rispetto a ciascuna geometria, riguarda la sussistenza di relazioni strutturali tra i concetti primitivi ed alcune importanti proprietà. Una seconda questione che vogliamo indagare riguarda la possibile esistenza, non escludibile a priori, di *nuove* – cioè non conosciute – geometrie "non-euclidee" che condividono con le altre alcuni aspetti cruciali da individuare. Affrontiamo, infine, il problema di precisare il significato dell'appellativo *non-euclideo* attribuito alle geometrie diverse da quella del matematico alessandrino: per alcuni è non-euclidea solo la geometria iperbolica, non quella ellittica. Perché? Perché solo questa si ottiene dalla *negazione* di uno dei postulati di Euclide. Altri, invece, ricostruiscono la geometria ellittica negando un assioma "equivalente" al quinto postulato: chi ha ragione?
È chiaro che questi diversi aspetti della geometria possono essere analizzati soltanto sulla base di un contesto esplicito e ben preciso, che nel presente articolo è quello assiomatico, in presenza di un assioma di continuità sufficientemente forte – quello di Dedekind relativo ai segmenti – per escludere geometrie (ad esempio i piani semi-euclidei, semi-iperbolici o semi-ellittici) interessanti ma non pertinenti rispetto ai nostri obiettivi.
Il risultato che illustriamo è la scoperta di una nuova e fondamentale geometria, la GEOMETRIA PREASSOLUTA, capace di rispondere adeguatamente ai quesiti prospettati. La breve distanza linguistica e concettuale tra la geometria preassoluta e il sistema assiomatico euclideo-hilbertiano della geometria euclidea ne consentirà inoltre un'applicazione didattica, nei licei scientifici, in grado di approfondire nozioni come postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione nonché di affrontare lo sviluppo storico (fino ai giorni nostri!) della geometria secondo le richieste delle Indicazioni Nazionali.

1. Il Problema dei Tre Punti

Soltanto qualche decennio prima della comparsa degli *Elementi* di Euclide, Aristotele aveva espresso dubbi di natura logica sulla possibilità di dimostrare l'esistenza di rette parallele ([1] pp. 119, 120). Il filosofo greco aveva anche dimostrato ([1] pp. 117, 118) che la somma degli angoli interni di un triangolo, nella geometria euclidea, è un angolo piatto: l'argomentazione prevedeva di tracciare (nel caso esistesse…) la parallela ad un lato del triangolo passante per il vertice opposto. Le due questioni possono essere collegate nel più generale PROBLEMA DEI TRE PUNTI: determinare se esistono e quante sono le rette che, passando per uno di tre punti non allineati, sono parallele alla retta passante per gli altri due. La discussione di questo problema – generalizzazione dello storico Problema delle parallele (denominazione ricavata dal titolo di un capitolo del *Vermischte Aufsätze*, 1826, di J. J. I. Hoffmann) – esige l'analisi di diverse nozioni, a partire da quelle concernenti la struttura degli enti geometrici fondamentali. La *struttura della retta* è caratterizzata da due possibili tipologie:
Definizione. Una retta si dice APERTA se, percorrendola illimitatamente lungo uno qualunque dei due versi, *non* si ritorna al punto di partenza. Altrimenti la retta è detta CHIUSA.
Anche la nozione di *struttura del punto* è duplice:
Definizione. Un punto si dice DOPPIO se esistono un secondo punto, diverso dal primo, e due rette, diverse tra loro, che passano per entrambi i punti (detti SIMMETRICI tra loro). Altrimenti il punto è detto SINGOLO.
Quindi, per due punti, dei quali uno sia singolo, passa solo una retta. Anche riguardo alla *struttura del piano* si possono distinguere due casi:
Definizione. Un piano si dice ESPLOSO se esistono una retta ed un punto esterno ad essa per il quale passano almeno due parallele a tale retta. In caso contrario il piano è detto IMPLOSO.

Con ESISTENZA e UNICITÀ si intendono, rispettivamente, *esistenza* e *unicità di una retta parallela a una retta data e passante per un punto dato esterno a quest'ultima*. L'*unicità* di un ente

soddisfacente una data proprietà non coinvolge quella di esistenza: la sua formulazione logica - *Se dei termini denotano enti soddisfacenti una data proprietà allora essi denotano lo stesso ente* - è un'implicazione vera anche in assenza di enti che la soddisfino. La diffusa consuetudine a esigere l'esistenza dell'ente in questione per affermarne l'unicità ha alimentato una imbarazzante confusione concettuale sul Problema delle parallele.
In questi termini il Problema dei tre punti può essere analizzato secondo due punti di vista complementari:

PROBLEMA DEI TRE PUNTI – A

Dati tre punti non allineati, esistono rette passanti per uno di essi e parallele alla(e) retta(e) passante(i) per gli altri due? Se esistono, quante sono? Quale rapporto sussiste tra il numero N di queste rette e la struttura della retta? Il numero N è in stretta relazione con le nozioni di *esistenza* ($N \geq 1$) e di *unicità* ($N \leq 1$).

PROBLEMA DEI TRE PUNTI - B

Dati tre punti non allineati, esistono triangoli individuati da essi? Se esistono, quanti sono? Quali rapporti sussistono tra il numero di questi triangoli e le strutture delle rette e dei punti?

Storicamente sono state date diverse risposte al Problema dei tre punti **A**: *in primis* quella individuata dal sistema di postulati di Euclide, quindi quelle dei sistemi assiomatici classici delle ottocentesche geometrie non-euclidee e della geometria di Hilbert e, da ultima, quella prospettata dal sistema assiomatico Γ della nuova geometria preassoluta. Lo studio approfondito dei due aspetti del Problema dei tre punti coinvolge tutte le questioni presentate nell'introduzione.

2. Il 5° postulato di Euclide e l'Assioma delle parallele

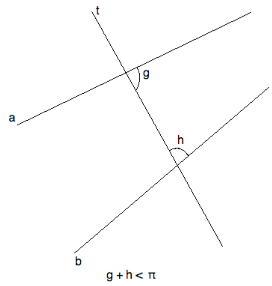
A tutt'oggi il *Libro* I degli *Elementi* di Euclide (nel seguito indicato semplicemente con *Elementi*) costituisce la base metodologica dell'insegnamento scolastico della geometria: il matematico di Alessandria ci ha educati ad accettare una verità geometrica solo se dimostrabile rigorosamente a partire da inoppugnabili evidenze logiche (nozioni comuni) e geometriche (postulati). Per più di venti secoli il suo dibattuto quinto postulato è stato – e, come si vedrà, è ancora – fonte inesauribile di implicazioni sorprendenti. Che cosa dice? Secondo la maggior parte dei manuali scolastici – ma anche secondo numerosi matematici – esso afferma che *Per un punto esterno a una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data* ($N = 1$, ASSIOMA DELLE PARALLELE): nulla di più falso, Euclide non l'ha mai detto! Negli *Elementi* compare sì la PROPOSIZIONE 31 – non postulata ma *dimostrata* usando *solo* i primi quattro postulati – *Per un punto esterno a una retta passa* [almeno] *una retta parallela alla retta data* ($N \geq 1$), ma il quinto postulato richiede testualmente [1]
POSTULATO V (Q): *Qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono «gli angoli» minori di due retti.*
In una forma per nulla semplice ed evidente, il postulato Q afferma essenzialmente che *Se due rette sono convergenti allora sono incidenti*: chiaramente Q, consentendo al più l'esistenza di una sola parallela ad una retta passante per un punto esterno, caratterizza un piano geometrico imploso ($N \leq 1$).
La differenza sostanziale tra Q e l'ASSIOMA DELLE PARALLELE emerge quando si passa alla loro negazione: mentre da un lato $\neg Q$, *Esistono almeno due rette convergenti parallele*, caratterizza un piano esploso ($N > 1$), dall'altro la negazione dell'ASSIOMA DELLE PARALLELE viene utilizzata per fornire gli assiomi base delle due geometrie non-euclidee ellittica e iperbolica:

1. ASSIOMA ELLITTICO ($N < 1$) *Per un punto esterno a una retta non passa alcuna retta parallela alla retta data*,
2. ASSIOMA IPERBOLICO ($N > 1$) *Per un punto esterno a una retta passa più di una retta parallela alla retta data*.

È esattamente questa la definizione "ufficiale" delle geometrie non-euclidee riportata in [2].
[*Segue al numero* 191]

Bibliografia: [1] Euclide. (2007). *Tutte le opere.* (F. Acerbi, A cura di) Milano: Bompiani. [2] Sidorov, L. A., Riemann geometry, elliptic geometry *Encyclopaedia of Mathematics* (ed. Michiel Hazewinkel) Springer Online Reference Works (http://eom.springer.de/default.htm)

[*] Già insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Oberdan" di Trieste; e-mail: franco.rupeni@gmail.com
[**] Insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Marinelli" di Udine; e-mail: a.zampa@alice.it
Questo lavoro è stato presentato in aprile, a Spoleto, durante l'ultimo congresso nazionale della MATHESIS.



«…Terribilis est locus iste»

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 189]

$T_{3,18}$ è più fine (meno grossolana) di $T_{3,3}$ e $T_{3,23}$ è più grossolana (meno fine) di $T_{3,45}$. L'insieme $A_2=\{a, b\}$ è un insieme generato da $X_3=\{a, b, c\}$, ma non è parte di $T_{3,53}$. Con riferimento all'esempio del paragrafo precedente, $T_4= \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$ è una topologia più fine di T_2. Con riferimento a T_4, i punti di accumulazione, per $A=\{a, b, c\}$, sono ancora b, d, e. Osservo, anche, che in generale l'unione di due topologie non dà una topologia. Infatti: $T_{3,4} \cup T_{3,5} = W_{3,19}$ che non è una topologia.

Tab. 1

$\cap$	$\varnothing$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b, c\}$	X
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{c\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\{a, c\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a, c\}$
X	$\varnothing$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b, c\}$	X

Invece, l'intersezione di due o più topologie è sempre una topologia. Per esempio, $T_{3,4} \cap T_{3,5} = T_{3,0}$ e $T_{3,17} \cap T_{3,31} = T_{3,52}$. Di quest'ultima, preparo una tabella di composizione (Tab. 1), per chi è pigro (un matematico lo è per constatazione: non ama né i calcoli lunghi, né le operazioni articolate e prolisse).
[*Segue dal numero* 191]

Sulla Matematica, di G. Leopardi

«[…] Perciò la matematica la quale misura quando il piacer nostro non vuol misura, definisce e circoscrive quando il piacer nostro non vuol confini (sieno pure vastissimi, anzi sia pur vinta l'immaginazione dalla verità), analizza, quando il piacer nostro non vuole analisi né cognizione intima ed esatta della cosa piacevole (quando anche questa cognizione non riveli nessun difetto nella cosa, anzi ce la faccia giudicare più perfetta di quello che credevamo, come accade nell'esame delle opere di genio, che scoprendo tutte le bellezze, le fa sparire), la matematica, dico, dev'esser necessariamente l'opposto del piacere. (18 settembre 1820) […]»

Tratto da G. Leopardi, Zibaldone (Pensieri di varia filosofia e di bella letteratura), Progetto Manuzio, www.liberliber.it