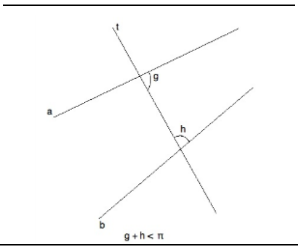
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 191 – Pubblicato il 01 – 08 – 2014



La Geometria Preassoluta

di Franco Rupeni[*] e Alessandro Zampa[**]

[*Segue dal* 190]

3. Geometrie assoluta ed ellittica

La geometria assoluta, base delle geometrie euclidea e iperbolica. Il sistema della GEOMETRIA ASSOLUTA piana degli *Elementi* si fonda, come prevedeva il paradigma aristotelico di conoscenza scientifica, sopra "autoevidenti" *principi primi*: Euclide sceglie NOVE NOZIONI COMUNI alle diverse discipline – affermazioni indipendenti dalla particolare disciplina, in questo caso la geometria, sotto studio – e i seguenti QUATTRO POSTULATI la cui validità è suffragata dalla costruibilità mediante riga e compasso di segmenti e circonferenze:

Sia stato richiesto
POSTULATO I: *di condurre una linea retta* ***da*** *ogni punto* ***a*** *ogni punto.*

Attualmente il postulato riceve la nota perifrasi *Per due punti passa una e una sola retta*. In realtà il postulato asserisce la semplice esistenza della retta (per due punti passa *almeno* una retta) anche se, nell'uso che ne fa, Euclide assume *implicitamente* che la retta sia unica. Ancor più interessante, per gli sviluppi futuri, risulta rimarcare come nella formulazione euclidea del postulato venga espressa la nozione di verso di percorrenza di una retta, tracciabile da un *primo* punto A ad un *secondo* punto B (scambiando il ruolo dei due punti si traccia la *stessa* retta, "percorsa" però nel verso opposto).

POSTULATO II: *e di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in <linea> retta.*

Euclide usa il postulato per prolungare la retta "limitata" – il "nostro" segmento di estremi i punti A e B – sia da una parte che dall'altra, in punti *sempre diversi* in modo da ottenere una linea di lunghezza infinita. Il POSTULATO II significa che la retta è aperta, non escludendo tuttavia che la retta prolungata possa far ritorno su se stessa producendo così una retta chiusa di lunghezza finita: è questa l'ipotesi formulata da Riemann.

POSTULATO III: *e che con ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio.*

Esiste un cerchio di centro e raggio arbitrari.

POSTULATO IV: *e che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro*.

I due angoli retti che dividono un angolo piatto sono uguali per definizione, il postulato si riferisce ad angoli retti arbitrari.

La geometria assoluta è una sorta di trampolino di lancio per la geometria non-euclidea essendo condivisa da due geometrie, l'euclidea e l'iperbolica: la prima scaturisce *specializzando* la geometria assoluta mediante Q, la seconda mediante $\neg Q$ oppure l'ASSIOMA IPERBOLICO, tra loro equivalenti nella geometria assoluta. Com'è venuto alla luce il "brutto anatroccolo" Q? Dopo aver dimostrato il teorema diretto delle parallele (PROPOSIZIONI 27/28, *Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali, angoli corrispondenti uguali, o angoli coniugati interni supplementari allora esse sono parallele*) Euclide, dovendo dimostrare il teorema inverso (PROPOSIZIONE 29, *Se due rette sono parallele allora esse tagliate da una trasversale formano angoli coniugati interni supplementari*), crea e usa – per la prima (e unica!) volta – il postulato Q. Le PROPOSIZIONI 1-28 costituiscono, assieme alla PROPOSIZIONE 31, il *corpus* della geometria assoluta [3, pag.118]: tutte queste proposizioni, dimostrate senza l'uso di Q, sono teoremi, oltre che della geometria euclidea, anche di quella iperbolica.
I falliti tentativi di provare Q aprirono la strada alla scoperta della geometria iperbolica: spesso, infatti, la "dimostrazione" veniva fondata sul ragionamento per assurdo, assieme ai quattro postulati euclidei si assumeva $\neg Q$ per tentare di dedurre la fatidica contraddizione che avrebbe dimostrato il postulato (il tentativo più interessante di dimostrazione indiretta è ascrivibile al logico italiano Girolamo Saccheri). I risultati ottenuti, sebbene controintuitivi e in apparenza contraddittori, erano veri e propri teoremi dell'insorgente geometria iperbolica. I pionieri che ebbero il coraggio di interpretare gli "strani" teoremi che andavano deducendo, verso il 1830, come evidenza di una nuova geometria furono Lobačevskij e Bolyai, ma soltanto la successiva scoperta di *modelli euclidei* per la geometria iperbolica (Beltrami 1868, Klein 1872, Poincaré 1882) ne sancì la coerenza relativa: se la geometria euclidea è coerente tale è anche l'iperbolica.

La geometria ellittica di Riemann. Qualche decennio più tardi Riemann concepì la geometria ellittica, fondata in seguito sull'ASSIOMA ELLITTICO (detto anche assioma di Riemann) ovvero sulla NON ESISTENZA: dato che quest'ultima è incompatibile con il POSTULATO II, caratterizzante la retta aperta, di norma vengono assunti specifici assiomi caratterizzanti rette chiuse. La geometria ellittica si biforca poi in *singola* e *doppia*: nella prima tutti i punti sono singoli, nella seconda tutti i punti sono doppi. Interpretando sulla superficie di una sfera euclidea i termini *retta* come circonferenza di raggio massimo e *punti simmetrici* come punti antipodali otteniamo un modello della geometria ellittica doppia. Se poi i punti antipodali vengono "pensati" come un *unico* punto, il modello descrive la geometria ellittica singola.

4. L'approccio assiomatico quantitativo

Sin dall'antichità i matematici hanno tentato l'impossibile dimostrazione di Q nella geometria assoluta o comunque la sostituzione con un altro enunciato più semplice ma equivalente, come ad esempio il summenzionato ASSIOMA DELLE PARALLELE, proposto da Hilbert nella prima edizione dei *Fondamenti della Geometria* del 1899. Va da sé che la nozione di equivalenza tra enunciati deve essere riferita a un preciso sistema di assiomi: due enunciati A e B sono *equivalenti* nel sistema Σ *se e solo se* i sistemi $\Sigma + A$ e $\Sigma + B$ producono gli stessi teoremi.
Già alla fine del Settecento trovava ampia diffusione l'ASSIOMA

DI PLAYFAIR, *Per un punto esterno ad una retta data non può passare più di una retta parallela ad essa* $(N \leq 1)$, *logicamente equivalente*, cioè equivalente in un arbitrario sistema assiomatico, all'UNICITÀ (sebbene a tutt'oggi persista l'errore diffuso di attribuire a Playfair il postulato che esprime l'accezione dell'UNICITÀ congiunta all'ESISTENZA, cioè $N = 1$). L'approccio assiomatico *quantitativo*, riferito al numero N di rette parallele, si è progressivamente radicato nel corso dell'Ottocento: infatti non solo la geometria iperbolica, scaturita dalla negazione di Q (si pensi alle sue "dimostrazioni" indirette), viene fondata da Lobačevskij sul quantitativo ASSIOMA IPERBOLICO, ma anche la successiva geometria ellittica è costruita sul quantitativo ASSIOMA ELLITTICO. Tutto sembrerebbe filare liscio, se non accadesse che nella geometria ellittica l'enunciato Q, invece di essere falso come vorrebbero la precedente definizione e l'equivalenza tra il postulato Q e l'ASSIOMA DELLE PARALLELE, è vero: dato che secondo l'ASSIOMA ELLITTICO tutte le rette s'incontrano, anche le due rette menzionate in Q devono incontrarsi! Insomma, nella non-euclidea geometria ellittica Q è incontestabilmente vero, con buona pace di coloro che continuano a sostenerne, sulla base di un diffuso e (pur)troppo ben radicato pregiudizio, la falsità [4]!

L'equivalenza tra Q e l'ASSIOMA DELLE PARALLELE sussiste *soltanto* nella geometria assoluta dove vale il teorema di ESISTENZA (PROPOSIZIONE 31) e pertanto i due enunciati – come pure le rispettive negazioni – non sono necessariamente equivalenti nel contesto più ampio in cui possano non esistere rette parallele. La definizione "ufficiale" inoltre sembra non tener conto del fatto che le rette della geometria assoluta e le rette della geometria ellittica sono enti diversi: entrambi chiamati "rette", sono tuttavia caratterizzati – come vedremo – da assiomi diversi, rispettivamente dagli assiomi di ordinamento e di separazione.

Per risolvere il problema è necessario formulare una definizione unitaria della nozione di "retta" – presupposto imprescindibile per poter confrontare due teorie *differenti* fondate su nozioni di retta *differenti* – nel contesto di una geometria più generale i cui assiomi riescano a produrre una *dimostrazione effettiva* della non equivalenza tra Q e l'ASSIOMA DELLE PARALLELE: che i due enunciati non siano equivalenti nella geometria ellittica appare evidente (il primo è vero, il secondo è falso), ma – Euclide ce lo ricorda – tutte le verità geometriche non postulate – persino le "più evidenti" – esigono una dimostrazione che deve essere fondata su un ben preciso sistema di assiomi. Ragione per cui una qualunque affermazione riguardante entrambe le geometrie assoluta ed ellittica esige una dimostrazione riferita ad un *sistema assiomatico unitario*: la geometria preassoluta, appunto.

[*Segue al numero* 192]

Bibliografia: [3] Trudeau, R. (1991). *La rivoluzione non euclidea.* Torino: Bollati Boringhieri. [4] Rupeni, F., & Zampa, A. (2014). *Il peccato di Euclide – Pregiudizi sul Quinto Postulato* (Vol. I). (in attesa di pubblicazione).

[*] Già insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Oberdan" di Trieste; e-mail: franco.rupeni@gmail.com
[**] Insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Marinelli" di Udine; e-mail: a.zampa@alice.it

Questo lavoro è stato presentato in aprile, a Spoleto, durante l'ultimo congresso nazionale della MATHESIS.

«…Terribilis est locus iste»

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 190]

"Message in the bottle"

Per fortuna le onde elettromagnetiche si muovono anche nello spazio vuoto. La radio ricetrasmittente della navicella permette una comunicazione con un ipotetico mondo lontano. Mi arriva una comunicazione chissà da dove, da chi. Non so da quale mondo. È l'unico contatto con qualcuno, qualcosa. C'è chi mi avverte che «*Sognare va bene ma certe stranezze, secondo te, non lo sono poi tanto. Che ti piacciano o no le ambiguità di cui parlavi nel numero precedente, trovare in uno spazio topologico insiemi che sono aperti e chiusi non è poi strano: significa solo che lo spazio in cui sei è uno spazio topologico sconnesso (questa è esattamente la definizione di spazio topologicamente sconnesso!). Del resto, una topologia su un insieme finito (come il tuo) non può essere poi troppo "bella": per dirne una, quando lo spazio ha un numero finito di punti, l'unica topologia che separa i punti è la topologia discreta (quella per cui tutti i sottoinsiemi sono aperti)! In tutti gli altri casi, ci sono coppie di punti topologicamente indistinguibili e, in particolare, gli assiomi di separazione di Tychonov* [B.5] *te li scordi!*» Costui mi segue, mi legge, mi ascolta: non sono proprio solo. Chi sarà mai? Non ho mai creduto agli angeli custodi, ma questo messaggio credo che mi venga inviato da qualcuno del genere. Peraltro, il mio sogno è piuttosto disturbato; di certo, non mi piace lo spazio in cui mi trovo. A volte mi pare che questi cinque punti si muovano lentamente e che io sia inghiottito in un sistema difficile da capire e da amare.

Il tarabusino "Tychonov" pronto a beccarmi (disegno di L.C.)

Comunque, il nome *Tychonov* mi ricorda un tarabusino (noto uccello delle zone umide, molto carino e simpatico, ma da tenere lontano dagli occhi) pronto a beccarmi uno degli occhi, al primo errore.

Nel cilindro della navicella cerco ora qualcosa che faccia capire meglio la situazione in cui mi trovo; cerco un possibile innocuo correttore.

Base di una topologia

Sia $\{X, T\}$ uno spazio topologico e B una famiglia di aperti di T. Allora B è una base di topologia per T se tutti gli insiemi aperti di T possono essere il risultato dell'unione degli aperti di B. Cioè, mediante B e l'operazione di unione, si può ottenere ogni insieme di T. Verifico quale sia la famiglia di aperti di T_2 che possa essere una base di topologia per il nostro spazio. In questo mio mondo $\{X, T_2\}$, con $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $T_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$ una base di topologia B di T_2, mi viene dalla seguente tavola di composizione

$\cup$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d,e\}$	X
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d,e\}$	X
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$	X	X
$\{c,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d,e\}$	X
$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$	X	X
$\{b,c,d,e\}$	$\{b,c,d,e\}$	X	$\{b,c,d,e\}$	X	$\{b,c,d,e\}$	X
X	X	X	X	X	X	X

Ragiono così: se tolgo $\{a\}$ non posso più formare $\{a, c, d\}$; se tolgo $\{c, d\}$ non posso più formare $\{a, c, d\}$, se tolgo $\{a, c, d\}$ tutto funzionerebbe lo stesso, se tolgo $\{b, c, d, e\}$ non potrei più ottenerlo mediante l'unione di altri aperti di T_2. Perciò, la nostra base di topologia per T_2 è $B = \{\varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Perciò, il concetto "base di topologia" per me esprime una condizione di minima ampiezza di T.

Insiemi separati

Consideriamo uno spazio topologico $\{X, T\}$. Si dice che esso è separato se $\forall x, y \in X, x \neq y$, esistono due aperti di T, G_x e G_y tali che: $x \in G_x$, $y \in G_y$, $G_x \cap G_y = \varnothing$. Il tedesco Felix Hausdorff (1868 - 1942) ebbe il merito di aver definito il concetto. Successivamente, ci furono dei raffinamenti concettuali, ma la definizione di spazio separato di Hausdorff è ancora valida ed elegante. Il nostro spazio topologico, $\{X, T_2\}$, non è uno spazio separato secondo Hausdorff. Infatti, le coppie x, y, con $x \neq y$, di X non sempre appartengono ad aperti di T_2 disgiunti. Le coppie di X (l'ordine non conta) sono: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$. Almeno una non ha elementi appartenenti ad aperti di T_2 tra di loro disgiunti: $\{c, d\}$. Lo sarebbe, invece, se T fosse l'insieme potenza di X.

[*Segue al numero* 192]