ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 192 – Pubblicato il 01 – 09 – 2014

La Geometria Preassoluta

di Franco Rupeni[*] e Alessandro Zampa[**]

[*Segue dal numero* 191]

5. I Fondamenti della Geometria di Hilbert

Già in epoca antica erano state individuate nel sistema euclideo delle *assunzioni implicite*, ossia dei veri e propri "postulati" che Euclide aveva usato nelle sue dimostrazioni senza averli espressamente dichiarati; la prima che balza agli occhi è l'esistenza di tre punti non allineati, il matematico greco parla di punti senza postulare la loro esistenza. Nella prima edizione (1899) dei *Fondamenti della Geometria* Hilbert crea una teoria assiomatica priva di assunzioni implicite e *completa* (dai suoi assiomi si possono dedurre *tutte* le verità geometriche, nella teoria non esistono enunciati *indecisi*) che integra e perfeziona il sistema dei compatti postulati euclidei, scorporandoli in diversi assiomi suddivisi nei cinque gruppi di *appartenenza, ordinamento, congruenza, parallelismo, continuità*. A grandi linee, l'*appartenenza* corrisponde al POSTULATO I, l'*ordinamento* al POSTULATO II, la *congruenza* ai POSTULATI III e IV e alle nozioni comuni, il *parallelismo* (ASSIOMA DELLE PARALLELE) al POSTULATO V, la *continuità* è invece un'assunzione implicita degli *Elementi*. Gli assiomi di congruenza, esprimenti l'uguaglianza euclidea, consentono di dimostrare il Principio di Isotropia e Omogeneità del piano, secondo il quale *Le proprietà geometriche relative a un dato punto e a una data direzione sussistono rispetto a un punto e a una direzione arbitrari*. Dal sistema hilbertiano si ottengono:

- la geometria assoluta togliendo l'ASSIOMA DELLE PARALLELE;
- la geometria iperbolica sostituendo l'ASSIOMA DELLE PARALLELE con l'ASSIOMA IPERBOLICO (o, se si preferisce, con $\neg Q$);
- la geometria ellittica singola sostituendo l'ASSIOMA DELLE PARALLELE con l'ASSIOMA ELLITTICO, gli ASSIOMI DI ORDINAMENTO con gli ASSIOMI DI SEPARAZIONE e modificando alcuni ASSIOMI DI CONGRUENZA;
- la geometria ellittica doppia sostituendo l'ASSIOMA DELLE PARALLELE con l'ASSIOMA ELLITTICO, gli assiomi di ORDINAMENTO con gli assiomi di SEPARAZIONE, modificando alcuni assiomi di CONGRUENZA e gli assiomi di APPARTENENZA in modo da porre in esistenza i punti doppi, con la contemporanea e necessaria ridefinizione dei concetti di segmento, di angolo e di triangolo.

Assioma delle parallele e unicità della parallela. Nel processo storico di revisione dell'opera di Euclide il quinto postulato ha ricevuto significato attraverso il concetto di semipiano il quale, consentendo d'interpretare la relazione "dalla stessa parte" (rispetto alla trasversale), spiega anche la proprietà "all'interno" (tra le due rette). Tuttavia questa consolidata tradizione lascia privo di senso l'antecedente dell'implicazione che esprime il quinto postulato nella geometria ellittica singola nella quale, essendo il piano non orientabile, i semipiani non esistono. Bisogna altresì notare che l'antecedente del quinto postulato ha carattere locale a un livello molto profondo, ragione per cui è possibile dargli senso nella geometria ellittica singola il cui piano è localmente orientabile: attribuirgli carattere globale, associandolo alla richiesta di esistenza dei semipiani, risulta alla fin fine un'operazione eccessivamente restrittiva. Infatti, un'analisi attenta della proprietà "all'interno" mostra come questa si lasci definire con una certa difficoltà dal concetto di semipiano: l'interno delle due rette (che per Euclide sono segmenti) dovrebbe essere definito come l'intersezione dei due semipiani che hanno per origine ciascuno la retta (nel senso attuale del termine) che fa da supporto a uno dei due segmenti contenenti l'altro. Dato che il postulato deve ricevere significato universale rispetto a tutti i possibili segmenti, tale definizione non è accettabile a causa dell'esistenza di segmenti incidenti e deve pertanto venire indebolita mediante la semplice richiesta che ciascun semipiano contenga il punto di intersezione dell'altro segmento con la trasversale. La relazione "dalla stessa parte" caratterizzata dall'esistenza dei semipiani viene così definita: due punti stanno dalla stessa parte rispetto a una retta se *il* segmento del quale sono estremi non interseca la retta. Questa definizione prevede che il segmento sia unico contrariamente a quanto accade nella geometria ellittica singola; pertanto sembra opportuna la seguente generalizzazione: due punti stanno dalla stessa parte rispetto a una retta se *esiste* un segmento che li abbia come estremi e che non la intersechi. Così l'intero enunciato del quinto postulato diventa sensato, dunque vero, nella geometria ellittica singola. Se la precedente definizione non dà ancora ragione del significato locale della premessa, nel contesto della geometria preassoluta verrà data una formulazione valida in tutte le geometrie. Le difficoltà legate al quinto postulato hanno indotto Hilbert a sostituirlo con un altro enunciato: nelle prime tre edizioni dei *Fondamenti della Geometria* Hilbert ha rimpiazzato l'euclideo postulato Q con l'ASSIOMA DELLE PARALLELE ($N = 1$), mentre nella quarta (1913) e successive ha assunto – in sua vece, conservandone la denominazione – l'UNICITÀ ($N \leq 1$). Perché lo ha fatto? Verosimilmente si è accorto che, non essendo necessario postulare l'ESISTENZA – già teorema della geometria assoluta di Euclide –, è sufficiente assumere la "più debole" condizione di UNICITÀ. Va da sé che la modifica dell'autorevole matematico, passata per lo più inosservata, ha causato – o quantomeno alimentato – l'ambiguità della nozione di *unicità della parallela*, per alcuni matematici espressa dalla condizione $N \leq 1$ (UNICITÀ) e per altri – forse la maggior parte – da $N = 1$ (ESISTENZA $\wedge$ UNICITÀ).

Gli assiomi di ordinamento. Il punto critico del sistema hilbertiano è costituito dagli assiomi di ordinamento della retta caratterizzanti la relazione ternaria "stare fra", la quale è simmetrica rispetto ai due punti fra i quali sta il terzo: uno specifico assioma afferma che "*se B sta fra A e C allora B sta fra C e A*". Se la relazione *stare fra* caratterizza la retta aperta, in una retta chiusa accade che per tre punti qualsiasi A, B e C, B sta sia fra A e C che fra C e A, ma anche che C sta fra B e A e dunque pure fra A e B e che A sta tra C e B come anche fra B e C: insomma tre punti qualunque di una retta chiusa stanno nella relazione d'ordinamento in qualunque ordine si prendano e quindi la relazione è satura, completamente inutile alla caratterizzazione della retta chiusa (non consente, quantomeno, di distinguere su di essa i due diversi segmenti individuati da due punti). Il motivo della scelta di simmetrizzare la relazione è facilmente comprensibile in termini di economia degli assiomi: infatti mediante il successivo assioma, *Se A e C sono due punti distinti sulla retta esiste un punto D tale che C sta fra A e D*, Hilbert ottiene la prolungabilità "simultanea" di un segmento AC in entrambi i versi, a seconda di quale dei suoi due estremi venga chiamato C. Per riuscire a caratterizzare l'ordine ciclico su una retta chiusa è pertanto necessario introdurre una diversa relazione; di solito si utilizza la relazione quaternaria di *separazione* secondo cui, essenzialmente, dati quattro punti A, B, C, D di una retta, la coppia A, C separa la coppia B, D *se e solo se* tra i punti B e D sta uno solo dei due punti A e C, e tra questi ultimi sta uno solo dei primi due (si pensino quattro punti A, B, C, D presi nell'ordine sulla circonferenza). Come vedremo, la soluzione dell'arduo problema di trovare una descrizione unica delle due incompatibili tipologie di retta è un incredibile straordinario uovo di Colombo: basta ripristinare l'idea originale di Euclide che, nel *condurre* – usando semplicemente la riga! – *una linea retta **da** ogni punto **a** ogni punto*, individuava su di essa un verso di percorrenza e nelle dimostrazioni prolungava – sempre con la stessa riga! – la "retta limitata" *soltanto* da una delle due parti alla volta: esattamente quanto farà la nuova geometria preassoluta.

6. La geometria preassoluta del piano

A quanto ci risulta le uniche fonti in letteratura in cui le geometrie non-euclidee sono state unificate a quella di Euclide in un sistema assiomatico, per esempio [5], [6] o [7], utilizzano una trattazione che non è pura dal punto di vista matematico, dato che mescolano l'approccio strettamente *sintetico* (caratterizzato cioè da un sistema di assiomi riguardanti enti puramente geometrici come i punti, le rette, …) con strumenti non geometrici. In [5] e [6] viene usata la teoria dei gruppi in conformità al *Programma di Erlangen*, anche se in [8], invece di un gruppo di trasformazioni, viene usata la sola nozione di perpendicolarità. In [7] si usa invece il formalismo analitico dei numeri reali. Oltre a ciò, l'unificazione proposta in questi approcci coinvolge soltanto una delle due geometrie ellittiche, rispettivamente la singola e la doppia. L'autore stesso di [7] in una nota (p. 216) ritiene interessante ed auspica una trattazione assiomatica pura, ancora inesistente, in cui tutte le geometrie elementari siano unificate.

La *geometria preassoluta*, base delle geometrie assoluta ed ellittica. Come gli assiomi della geometria assoluta descrivono i concetti geometrici comuni alle due geometrie euclidea e iperbolica, così il sistema assiomatico Γ della geometria preassoluta deve essere capace di esprimere le nozioni geometriche condivise dalle geometrie assoluta ed ellittica: in alternativa agli assiomi di ORDINAMENTO della retta aperta e agli assiomi di SEPARAZIONE della retta chiusa, Γ assume *soltanto* gli assiomi di ORIENTAZIONE caratterizzanti le proprietà di una più generale e unificata nozione di retta. Il sistema di Hilbert privato dell'ASSIOMA DELLA PARALLELA produce la geometria assoluta; se in quest'ultima gli assiomi di ordinamento vengono rimpiazzati da nuovi assiomi di COLLEGAMENTO e alcuni assiomi di CONGRUENZA vengono opportunamente modificati per essere compatibili con le rette chiuse, si ottiene Γ, che fornisce una caratterizzazione – nuova e sino ad oggi sconosciuta – di *tutti* i concetti geometrici (punto, retta, semiretta, segmento, angolo, triangolo) comuni a *tutte* le geometrie elementari. Il sistema Γ è presentato nella sua forma completa in [9], [10], [11], qui sono proposti – in forma semplificata – i soli assiomi di orientazione e di collegamento.

[*Segue al numero* 193]

Riferimenti bibliografici: [5] Bachmann, F. (1973), Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff (seconda edizione ampliata), Springer Verlag. [6] Ewald G. (1971), Geometry: An Introduction, Belmont, California: Wadsworth Publishing Company, Inc. [7] Kay D. C. (2011), College Geometry – A Unified Development, CRC Press. [8] Pambuccian V. (2007), Ortogonality as Single Primitive Notion for Metric Planes, Contributions to Algebra and Geometry, n. 2, pp. 399-409. [9] Zampa A. & Rupeni F. (2014), Il peccato di Euclide – Alla ricerca della Geometria Preassoluta (Vol. II) (in attesa di pubblicazione). [10] Zampa A. (2014), Pre-Absolute Geometry I – The metric point of view, (in preparazione) Journal of Geometry. [11] Zampa A. (2014), Pre-Absolute Geometry II – The order point of view (in preparazione) Journal of Geometry.

[*] Già insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Oberdan" di Trieste; e-mail: franco.rupeni@gmail.com
[**] Insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Marinelli" di Udine; e-mail: a.zampa@alice.it

Questo lavoro è stato presentato in aprile, a Spoleto, durante l'ultimo congresso nazionale della MATHESIS.

«…Terribilis est locus iste»

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 191]

Metto le mani dentro il contenitore cilindrico della mia navicella ed esce una cartella virtuale con la scritta "assiomi di separazione" e "spazi di Tychonov". È bello scoprire che ciò che vuoi conoscere si concreta ogniqualvolta poni le mani nel contenitore cilindrico (magico, forse un computer, forse qualcosa di più: si materializzano le cose ponendo le mani dentro il cilindro) del mio Challenger. Nella cartella, stanno scritte un mucchio d'informazioni. Intanto, mi accorgo che Andrej Nikolaevic Tychonov (1906 – 1993) non è un tarabusino. Fu un eminente matematico russo che scrisse cose importanti. Sono pochi a scrivere cose importanti, anche se tutti coloro che scrivono pensano, spesso, di immortalare cose fondamentali per l'umanità. Questa megalomania accompagna un po' tutti, ma soprattutto giornalisti e politici.

Mi accorgo, poi, che per ogni proprietà topologica degli spazi, rispetto al *concetto di separazione*, esiste una particolare topologia. Leggo le più importanti (Nota: $G_{(.)}$ sta per aperto, $N_{(.)}$ sta per chiuso):

T_0: uno spazio topologico $\{X, T\}$ è di questo tipo se
$\forall\, x, y \in X, x{\neq}y, (\exists G_x\!: x{\in} G_x, y{\notin} G_x) \vee (\exists G_y\!: y{\in} G_y, x{\notin} G_y)$;

T_1: uno spazio topologico $\{X, T\}$ è di questo tipo se
$\forall\, x, y \in X, x{\neq}y, (\exists G_x\!: x{\in} G_x, y{\notin} G_x) \wedge (\exists G_y\!: y{\in} G_y, x{\notin} G_y)$;
si può dimostrare che questa proprietà è equivalente a
$\forall\, x{\in}X, \{x\} = N_x$;
cioè, i singoletti sono insiemi chiusi rispetto alla topologia T considerata;

T_2: uno spazio topologico $\{X, T\}$ è di questo tipo se
$\forall\, x, y \in X, x{\neq}y, \exists\, G_x, G_y{\in} T\!: x{\in} G_x, y{\in} G_y, G_x{\cap}G_y{=}\varnothing$;
questa proprietà l'abbiamo già incontrata (Hausdorff);

T_3: uno spazio topologico $\{X, T\}$ è di questo tipo se è **T_1** e, inoltre, se vale la seguente proprietà di regolarità
$\forall x{\in}X, \forall A = N_A, x{\notin}A, \exists\, G_x, G_A\!: x{\in} G_x, A{\subset}G_A, G_x \cap G_A = \varnothing$;

T_4: uno spazio topologico $\{X, T\}$ è di questo tipo se è **T_1** e, inoltre, se vale la seguente proprietà di normalità
$\forall A, B, A{=}N_A, B{=}N_B, A{\cap}B{=}\varnothing, \exists\, G_A, G_B\!: A{\subset}G_A, B{\subset}G_B, G_A{\cap}G_B{=}\varnothing$.

Tutto questo casino di simboli e di bisogni, mi ricorda, la Torre di Babele. L'uomo costruisce, elabora, fa e poi, più si affanna, più la sua opera diventa mastodontica, contraddittoria, confusa e pian piano l'uomo stesso arriva alle premesse di un disastro, concettuale, linguistico, simbolico e operativo e, alla fine, tutto crolla inesorabilmente, collassa e si polverizza. La matematica non è esente dai difetti dell'umana debolezza.

$\sim$	Il simbolo a lato, noto come "tilde", dal latino "titulus" = segno (pare che sia di origine castigliana), indica ormai troppe cose distinte: è "circa uguale a" in «$x \sim y$»; è "relazione di equivalenza" in «$x \sim y$»; è "distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria x" in «$x \sim h(x\|\theta)$»; è "non" in «~P». Non solo un simbolo spesso afferisce a molti concetti, ma anche simboli distinti afferiscono allo stesso concetto. Siamo agli inizi di una Torre di Babele matematica?

Nella cartella sta scritto che uno spazio topologico $\{X, T\}$ si dice completamente regolare se
$\forall x \in X, \forall A$ *chiuso in* $\{X, T\}, x \notin A, \exists f\!: X{\to}[0, 1]$ *continua* $\mid f(x) = 0, f|_A \equiv 1$;
si dice spazio di Tychonov se è completamente regolare e **T_1**.
Ecco un esempio di spazio topologico non **T_0**: $\{X, T\}$ dove $X{=}\{a, b\}$ e $T{=}\{\varnothing, X\}$. Ecco un esempio in cui lo spazio topologico è **T_0**, ma non **T_1**: $\{X, T\}$ dove $X{=}\{a, b\}$ e $T{=}\{\varnothing, \{a\}, X\}$. Considero ora un esempio in cui lo spazio topologico è regolare, ma non **T_1**: $\{X, T\}$ dove $X{=}\{a, b, c\}$ e $T{=}\{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\}$.
Se $\{X, T\}$ è uno spazio topologico **T_1** di cardinalità finita, allora ha la topologia discreta.

[*Segue al numero* 196]