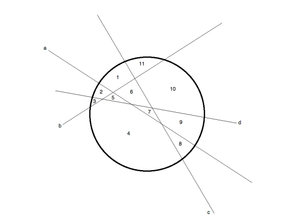
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 193 – Pubblicato il 01 – 10 – 2014



Le sezioni di un piano di Jacob Steiner

La Geometria Preassoluta

di Franco Rupeni [*] e Alessandro Zampa [**]

[*Segue dal* 192]

Assiomi di Orientazione. Se, come è stato indicato, il "difetto" della relazione ternaria hilbertiana «stare fra» intercorrente tra i punti di una retta è il ruolo simmetrico giocato dai due punti tra cui è situato il terzo, allora la cura deve essere quella di eliminare questa peculiarità indesiderata: invece di soffermarsi sulla proprietà di un punto di essere compreso tra altri due bisogna (riuscire a) esprimere la possibilità, dato un certo punto di partenza, di giungere a un secondo punto passando prima per un altro. Più esplicitamente, invece di dire che B sta fra A e C si afferma che partendo da A e passando per B si riesce a giungere a C: anche in questo caso B sta fra A e C, ma la differenza è che per giungere ad A partendo da C e passando per B si compie un percorso differente in quanto cambia il verso del moto. Nel sistema assiomatico viene quindi introdotta una nuova relazione ternaria, chiamata di orientazione perché permette di definire un "verso di percorrenza" delle rette: i tre punti distinti A, B e C sono in relazione, si scrive $A \succ B \succ C$ e si legge "da A a C per B", se per andare da A a C lungo il verso definito dalla relazione $\succ$ si deve prima passare per B. Ovviamente quella appena indicata è soltanto un'interpretazione delle proprietà della relazione $\succ$, le quali sono invece stabilite dai seguenti assiomi di ORIENTAZIONE:

OR.1 *Se per tre punti qualsiasi A, B e C vale $A \succ B \succ C$ allora tali punti sono allineati, cioè appartengono alla stessa retta r. Inoltre, il verso di percorrenza della retta r definito per mezzo di $\succ$ dalla successione di tre dei suoi punti è indipendente dalla loro scelta.*

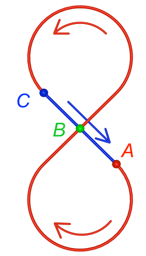
In altre parole, per esempio, se valgono $A \succ B \succ C$ e $A \succ D \succ B$ allora per giungere a C partendo da A e muovendosi nel verso $\succ$ è necessario attraversare B (prima affermazione), ma per passare per B è obbligatorio arrivare prima a D (seconda affermazione), quindi devono valere anche $A \succ D \succ C$ e $D \succ B \succ C$. Se invece valgono sia $A \succ B \succ C$ che $C \succ D \succ E$ allora è altrettanto lecito che risultino vere $B \succ C \succ D$ o $D \succ C \succ B$: se il lettore dà un'interpretazione di questo fatto, nel secondo caso scopre che la retta è necessariamente chiusa.

OR.2 *Dato un punto qualunque B di una retta esistono, sulla stessa retta, due punti A e C diversi da esso e tra loro tali che $A \succ B \succ C$.*

Questo assioma sancisce l'esistenza di almeno tre punti su qualsiasi retta e la conseguente possibilità di orientarla. Se dunque AB è un segmento allora l'assioma permette di prolungarlo dalla parte di B fino ad un certo punto C e, analogamente, se BC è un segmento allora questo è prolungabile dalla parte di B, nel verso opposto al precedente, fino ad un certo punto A: ogni segmento può dunque essere prolungato separatamente sia da una parte che dall'altra.

OR.3 *Dati tre punti distinti qualsiasi di una qualunque retta r esiste almeno un modo per dire quali siano A, B e C in modo che risulti $A \succ B \succ C$; inoltre per ciascuna di tali scelte non valgono $A \succ C \succ B$, $B \succ A \succ C$ e $C \succ B \succ A$.*

Se l'assioma OR.1 è compatibile con l'esistenza di rette aperte e di rette chiuse, OR.3 elimina le vie di mezzo, cioè le configurazioni in cui le rette possano autointersecarsi: questo è il contenuto della seconda parte. Se per esempio valessero sia $A \succ B \succ C$ che $C \succ B \succ A$ allora la retta sarebbe "chiusa" perché percorrendola si tornerebbe al punto di partenza, ma nel farlo si passerebbe due volte per lo stesso punto: nella figura a lato $A \succ B \succ C$ corrisponde al tratto rosso mentre $C \succ B \succ A$ a quello blu. Le altre due configurazioni vietate corrispondono ad altri tipi di "intrecciamento".



Una "retta" che interseca se stessa nel punto *B*.

La prima parte dell'assioma afferma invece che tre punti su una retta definiscono sempre un verso di percorrenza (sono disposti in successione secondo $\succ$), ma che lo stesso verso può corrispondere a più di una di tali disposizioni, come accade per le rette chiuse in cui se vale $A \succ B \succ C$ allora valgono anche $B \succ C \succ A$ e $C \succ A \succ B$.

OR.4 *Ogni angolo divide l'insieme dei punti del piano che non appartengono ai suoi lati in due regioni separate.*

Quest'ultimo assioma permette di dimostrare la proprietà di densità delle rette: presi due punti distinti P e Q di una retta r in modo che si possa giungere a Q passando per P esiste un punto R di r tale che $P \succ R \succ Q$. In particolare OR.4 è fondamentale per la definizione del concetto di triangolo.

La relazione di "orientazione" riesce a definire sia l'hilbertiana "stare fra":

« B sta fra A e C » $\Leftrightarrow A \succ B \succ C \vee C \succ B \succ A$

che la relazione di separazione (in modo altrettanto ovvio).

Le proprietà di *retta aperta* e *retta chiusa*. Il sistema Γ svolge un ruolo metateorico nei confronti delle teorie assiomatiche delle diverse geometrie elementari, ragione per cui chiameremo *metateoremi* quei teoremi di Γ che le pongono in collegamento. I primi tre assiomi di orientazione consentono di dimostrare il METATEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE secondo cui, sopra una retta arbitraria, vale una e una sola delle seguenti proprietà $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$, essenzialmente l'una negazione dell'altra ($\mathcal{C} \Leftrightarrow \neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \neg\mathcal{C}$):

$\mathcal{A}$. *Presi tre punti distinti qualsiasi A, B, C della retta r, se $A \succ B \succ C$ allora non vale $B \succ C \succ A$.*

$\mathcal{C}$. *Presi tre punti distinti qualsiasi A, B, C della retta r, se $A \succ B \succ C$ allora vale anche $B \succ C \succ A$.*

La condizione $\mathcal{A}$ esprime la nozione di RETTA APERTA perché non esiste alcun modo per ritornare ad un punto percorrendo la retta in una prefissata orientazione (e quindi pone in esistenza un unico segmento di estremi i punti A, C contenente il punto B). Al contrario, la condizione $\mathcal{C}$ esprime la nozione di RETTA CHIUSA perché è possibile ritornare al punto A percorrendo la retta in una prefissata orientazione: continuando a percorrere la retta nell'orientazione $\succ$ che porta dal punto A, passando per il punto B, al punto C, in virtù della densità della retta si trova un punto D che consente di raggiungere A, il punto di partenza (e quindi la proprietà pone in esistenza due segmenti distinti di estremi i punti A, C contenenti rispettivamente i punti B e D).

Le geometrie aperta e chiusa. Si potrebbe pensare che la geometria preassoluta descritta da Γ possa essere "ibrida", ovvero che sia possibile costruire, per esempio, angoli con un lato "aperto" ed un lato "chiuso". In realtà gli assiomi di congruenza di Γ consentono di dimostrare il metateorema di classificazione, secondo cui se una data retta soddisfa la condizione $\mathcal{A}$ allora la stessa condizione vale per ogni altra retta: e quindi la condizione $\mathcal{A}$, riferita a tutte le rette del piano, caratterizza la geometria con la retta aperta. Stesso discorso vale per la condizione $\mathcal{C}$. Pertanto si chiamerà GEOMETRIA APERTA la geometria caratterizzata dal sistema assiomatico $\Gamma_{\mathcal{A}} = \Gamma + \mathcal{A}$ mentre si chiamerà GEOMETRIA CHIUSA quella caratterizzata dal sistema $\Gamma_{\mathcal{C}} = \Gamma + \mathcal{C}$. I sistemi $\Gamma_{\mathcal{A}}$ e $\Gamma_{\mathcal{C}}$ sono rispettivamente – ed *essenzialmente* – equivalenti ai sistemi assiomatici della geometria assoluta ed ellittica (l'unica differenza tra i rispettivi modelli è l'esistenza o meno di una orientazione prefissata su ciascuna retta); in particolare il POSTULATO II degli *Elementi* è interpretato in Γ dall'enunciato $\mathcal{A}$ e la sua negazione da $\neg\mathcal{A}$.

La *geometria chiusa*, base delle geometrie ellittiche singola e doppia. A differenza della geometria aperta, nella quale si dimostra che per due punti distinti passa una e una sola retta, nella geometria chiusa possono esistere coppie di punti per i quali passano almeno due rette distinte: i seguenti assiomi di collegamento formalizzano queste proprietà. I punti e le rette sono legati dalla relazione binaria di "incidenza" secondo cui "il punto P appartiene alla retta r" oppure, in modo equivalente, "la retta r passa per il punto P". I seguenti assiomi di COLLEGAMENTO di Γ ammettono l'esistenza di punti singoli e di punti doppi:

COL.1 *Sull'insieme dei punti del piano esiste una relazione di equivalenza, detta* simmetria, *le cui classi di equivalenza contengono al massimo due elementi.*

Se la classe di equivalenza $[P]$ del punto P contiene solo tale punto si definisce $P^* = P$, altrimenti P^* indica l'altro elemento di $[P]$, che è detto simmetrico di P; chiaramente risulta $(P^*)^* = P$.

COL.2 *Dati due punti arbitrari A e B esiste una retta r a cui essi appartengono.*

COL.3 *Dati due punti arbitrari e distinti A e B, se questi non sono simmetrici tra loro ($B \neq A^*$) allora esiste al più una retta r a cui essi appartengono, altrimenti ce ne sono almeno due.*

Dunque un punto P è singolo se $P^* = P$, doppio se invece $P^* \neq P$.

COL.4 *Ad ogni retta r appartengono almeno due punti distinti A e B non simmetrici tra loro e nel piano esistono almeno tre punti A, B e C che non appartengono alla stessa retta.*

L'esistenza di punti singoli è formalizzata dall'enunciato

$\mathcal{S}$. *Ogni punto P del piano è simmetrico di se stesso ($P^* = P$),*

il quale afferma che tutti i punti sono singoli, mentre la sua negazione $\mathcal{D} = \neg\mathcal{S}$ garantisce l'esistenza di almeno un punto doppio

$\mathcal{D}$. *Esiste almeno un punto P del piano che non è simmetrico di se stesso ($P^* \neq P$).*

Oltre a individuare le *sole* geometrie aperta e chiusa, il META-TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE afferma anche che se vale $\mathcal{D}$, allora in realtà tutti i punti sono doppi e le rette sono chiuse, cioè $\mathcal{D} \Leftrightarrow \neg\mathcal{S}$ e $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}$: per questo motivo risulta che

$\Gamma_{\text{El.Sing.}} = \Gamma_{\mathcal{C}} + \mathcal{S} = \Gamma + \mathcal{C} + \mathcal{S}$ e $\Gamma_{\text{El.Dopp.}} = \Gamma_{\mathcal{C}} + \mathcal{D} = \Gamma + \mathcal{C} + \mathcal{D}$

sono rispettivamente (ed *essenzialmente*) i sistemi assiomatici della geometria ellittica singola e doppia e che, oltre a queste, non esistono altre geometrie chiuse. [*Segue al numero* 194]

[*] Già insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Oberdan" di Trieste; e-mail: franco.rupeni@gmail.com
[**] Insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Marinelli" di Udine; e-mail: a.zampa@alice.it
Questo lavoro è stato presentato in aprile, a Spoleto, durante l'ultimo congresso nazionale della MATHESIS.

I numeri $\mathbf{P}(k, m)$

di Gabriele Pupolin [***]

1. Introduzione

La formula che esplicita i numeri di Stirling di 1° specie in funzione dei numeri di Stirling di 2° Specie, sotto riportata, risulta essere di difficile soluzione e interpretazione:

$$c(n,k) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i+n+k} \binom{n-1+i}{n-k+i} \binom{2n-k}{n-k-i} S(n-k+i,i). \quad (1)$$

In tale formula $c(n, k)$ rappresenta i numeri di Stirling di 1° Specie (rappresentati nel seguito con la grafica $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$) e $S(n - k + i, i)$ rappresenta i numeri di Stirling di 2° Specie (rappresentati nel seguito con la grafica $\left\{ \begin{matrix} n-k+i \\ i \end{matrix} \right\}$).

Vedremo come con l'interposizione di una nuova matrice numerica si possa trovare una soluzione più semplice ed agevole rispetto la (1).

2. Diagonali di numeri di Stirling di 2° Specie e numeri $\mathbf{P}(k, m)$

Le diagonali dei numeri di Stirling di 2° Specie, aventi origine da $S(k, 0)$, sono ortogonali alle combinazioni con segno alternato secondo l'espressione

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{2k+1}{i} \left\{ \begin{matrix} 2k+1-i \\ k+1-i \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (2)$$

Si omette tale dimostrazione; si farà riferimento al prodotto della diagonale di una matrice per la porzione di una riga di un'altra matrice per dare una rappresentazione grafica del significato dell'espressione (2).

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Numeri di Stirling di 2° specie k = 3

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	-1						
2	1	-2	1					
3	1	-3	3	-1				
4	1	-4	6	-4	1			
5	1	-5	10	-10	5	-1		
6	1	-6	15	-20	15	-6	1	
7	1	-7	21	-35	35	-21	7	-1

Combinazioni a segno alterno (2k+1) = 7

$1{\cdot}350 - 7{\cdot}90 + 21{\cdot}15 - 35{\cdot}1 + 35{\cdot}0 = 0$

La stessa diagonale avente origine da $S(k,0)$ non risulta ortogonale alle combinazioni con segno alterno in un ristretto campo di variabilità di un parametro m

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m+k}{i} \left\{ \begin{matrix} m+k-i \\ m-i \end{matrix} \right\} \neq 0, \quad per\ 0 < m \leq k. \qquad (3)$$

Con il parametro m variabile nei naturali, la (3) coincide con la (2) per $m = (k + 1)$.

Anche in questo caso diamo una rappresentazione grafica di tale sommatoria.

k\m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Numeri di Stirling di 2° specie
k = 3; m = 3

k\m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	-1						
2	1	-2	1					
3	1	-3	3	-1				
4	1	-4	6	-4	1			
5	1	-5	10	-10	5	-1		
6	1	-6	15	-20	15	-6	1	
7	1	-7	21	-35	35	-21	7	-1

Combinazioni a segno alterno
m+k = 6

$1{\cdot}90 - 6{\cdot}15 + 15{\cdot}1 - 20{\cdot}0 = 15$

k\m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Numeri di Stirling di 2° specie
k = 3; m = 2

k\m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	-1						
2	1	-2	1					
3	1	-3	3	-1				
4	1	-4	6	-4	1			
5	1	-5	10	-10	5	-1		
6	1	-6	15	-20	15	-6	1	
7	1	-7	21	-35	35	-21	7	-1

Combinazioni a segno alterno
m+k = 5

$1{\cdot}15 - 5{\cdot}1 + 10{\cdot}0 = 10$

Con l'equazione (9) si vedrà che i risultati della (3) al variare di k e m all'interno dei numeri naturali (privati dello 0) sono anch'essi numeri naturali; essi costituiscono un insieme organizzabile in matrice; li indicheremo con la notazione $\mathbf{P}(k, m)$. [*Segue al numero* 195]

[***] Socio nazionale Mathesis - Preside CIFI (Collegio Ingegneri Ferroviari Italiani) – Venezia – e-mail: gabriele.pupolin@gmail.com