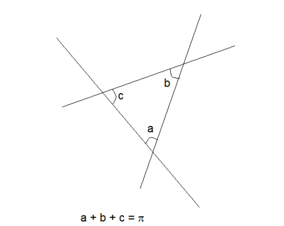
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 194 – Pubblicato il 02 – 11 – 2014



La Geometria Preassoluta

di Franco Rupeni[*] e Alessandro Zampa[**]

[*Segue dal* 193]

Il triangolo delle geometrie assoluta, ellittica e preassoluta. Nelle geometrie assoluta ed ellittica doppia una retta genera due semipiani e quindi tre punti non allineati definiscono il triangolo come intersezione dei tre semipiani che sono generati dalle rette passanti per due punti e contengono il terzo. Nella geometria ellittica singola, dove una retta genera un solo "semipiano" – il piano stesso privato della retta –, la precedente definizione perde significato e sono possibili ben otto trilateri, che si ottengono abbinando a tre a tre le coppie di segmenti delle tre rette chiuse: di questi soltanto quattro sono *triangoli*, cioè trilateri che godono delle proprietà comuni ai triangoli assoluti o doppiamente ellittici, come l'assioma di Pasch. Nelle *diverse* geometrie tre punti non allineati caratterizzano dunque nozioni di triangolo *diverse*, mentre la geometria preassoluta fornisce una definizione di interno di un triangolo *comune*. La costruzione del concetto di triangolo preassoluto avviene per gradi: innanzitutto si dimostra che esiste una regola per selezionare una tra le due regioni del piano individuate, secondo l'assioma OR.4, da un angolo; a questa regione viene assegnato lo *status* di interno dell'angolo e, nel caso della geometria assoluta o ellittica doppia, essa corrisponde all'usuale intersezione dei due semipiani aperti che definiscono l'angolo; il passo successivo consiste nel definire *triangolo* un poligono formato da tre segmenti (i lati) dei quali uno sta all'interno dell'angolo individuato dagli altri due (l'angolo opposto ad esso); infine, si dimostra che in un triangolo ogni lato è interno all'angolo opposto. Chi legge non deve tuttavia lasciarsi ingannare dalla semplicità di questa spiegazione: ideare il percorso non è stato così facile come potrebbe sembrare.

Le relazioni strutturali e la caratterizzazione delle geometrie elementari. Ispirandosi a Euclide che aveva congegnato la geometria assoluta sulla nozione di retta aperta, la costruzione del sistema assiomatico Γ della geometria preassoluta abbandona l'approccio assiomatico quantitativo e prende le mosse dagli assiomi di ORIENTAZIONE e di COLLEGAMENTO i quali, assieme a quelli di CONGRUENZA, dimostrano il METATEOREMA DI CLASSIFICAZIONE. *Soltanto* dopo aver studiato i rapporti assiomatici tra gli enti fondamentali punto e retta si giunge alla *caratterizzazione* della struttura dell'ente piano – IMPLOSO o ESPLOSO –, assumendo rispettivamente le cruciali proprietà $\mathcal{Q}$ o $\neg\mathcal{Q}$ descriventi il comportamento delle (eventuali) rette passanti per un punto A e parallele alla retta r passante per i punti B, C ma non per A, all'interno del piano individuato da A, B, C. Per dotare di senso l'enunciato di $\mathcal{Q}$ nella geometria preassoluta (e quindi in tutte le geometrie da essa definibili) è sufficiente riuscire a caratterizzare i due angoli che in esso vengono citati. Se ne dà allora la seguente formulazione: date due rette e una trasversale comune, se risulta minore di due retti la somma di due angoli formati dalla trasversale con le due rette, ciascuno contenente al suo *interno* punti di un lato dell'altro, allora le due rette si intersecano.

Mentre la geometria assoluta euclidea scaturisce dalla retta aperta, altrettanto non accade per la geometria ellittica tradizionale: essa nasce dall'assioma *quantitativo* ($N = 0$) di Riemann il quale, essendo incompatibile con la struttura della retta aperta (teorema di ESISTENZA), viene affiancato dagli assiomi di separazione caratterizzanti la retta chiusa. Questo modo piuttosto naïf di procedere si sconfessa da sé, visto che la non apertura della retta non ne comporta la chiusura e che dalla *quantità* N non è possibile inferire la tipologia *qualitativa* della retta: quest'ultima è imposta dall'*esterno* (e la scelta assiomatica che la retta sia chiusa ha un che di arbitrario). Con il risultato, decisamente spiacevole, della cesura assiomatica delle due geometrie assoluta ed ellittica. Nel sistema Γ della geometria preassoluta, invece, *si dimostra* che RETTA NON APERTA equivale a RETTA CHIUSA ed il *qualitativo* teorema di NON ESISTENZA (*chiusura della retta implica non esistenza di parallele*), controparte della *qualitativa* euclidea PROPOSIZIONE 31 (*apertura della retta implica esistenza di parallele*): ciò evidenzia come l'ASSIOMA ELLITTICO sia già soddisfatto nella geometria delle rette chiuse, implicandone la sovrabbondanza nella geometria ellittica.

Il legame tra RETTA APERTA ed ESISTENZA da un lato e RETTA CHIUSA e NON ESISTENZA dall'altro sottolinea l'analogia stretta della geometria preassoluta con la geometria assoluta di Euclide e rende ragione a Riemann il quale mai aveva postulato l'ASSIOMA ELLITTICO, limitandosi invece ad osservare [12] che l'illimitatezza della retta non implica necessariamente la sua infinitezza, potendo essere invece chiusa come nella geometria sferica (cioè ellittica doppia).

Oltre al METATEOREMA DI CLASSIFICAZIONE, in Γ si dimostra un altro importante risultato che mette in evidenza le relazioni strutturali tra i concetti primitivi, il METATEOREMA DI EQUIVALENZA, il quale afferma la validità delle seguenti equivalenze:

- vale POSTULATO V *se e solo se* vale UNICITÀ
- vale $\neg$(POSTULATO V) *se e solo se* vale $\neg$UNICITÀ
- vale RETTA APERTA *se e solo se* vale ESISTENZA
- vale RETTA CHIUSA *se e solo se* vale $\neg$ESISTENZA.

Di questi, i primi due sussistono già nella geometria assoluta, mentre gli altri due soltanto in quella preassoluta.

Riassumendo, dal punto di vista combinatorio mediante *specializzazione* sono possibili otto – e *solo* otto – sistemi assiomatici a seconda di come le dicotomie $\mathcal{A}$ o $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ o $\neg\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$ o $\neg\mathcal{Q}$ vengono sciolte; per il METATEOREMA DI CLASSIFICAZIONE solo quattro di essi sono non contraddittori e corrispondono alle geometrie note.

Tabella 1		
Geometria	Assiomatica qualitativa	Assiomatica Quantitativa
Euclidea	$\Gamma + \mathcal{A} + \mathcal{Q}$	$\Gamma + \mathcal{E} + \mathcal{U}$ $(N = 1)$
Iperbolica	$\Gamma + \mathcal{A} + (\neg\mathcal{Q})$	$\Gamma \cancel{+\mathcal{E}} + (\neg\mathcal{U}) = \Gamma + (\neg\mathcal{U})$ $(N > 1)$
Ellittica singola	$\Gamma + (\neg\mathcal{A}) + \mathcal{S}$	$\Gamma + \mathcal{S} + (\neg\mathcal{E}) \cancel{+} \mathcal{U} = \Gamma + \mathcal{S} + (\neg\mathcal{E})$ $(N < 1)$
Ellittica doppia	$\Gamma \cancel{+(\neg\mathcal{A})} + (\neg\mathcal{S}) = \Gamma + (\neg\mathcal{S})$	$\Gamma + (\neg\mathcal{S}) \cancel{+(\neg\mathcal{E})} \cancel{+} \mathcal{U} = \Gamma + (\neg\mathcal{S})$ $(N < 1)$

Grazie al METATEOREMA DI EQUIVALENZA si *dimostra* che l'*assiomatica qualitativa*, fondata sulle assunzioni di $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$ o delle rispettive negazioni, e l'*assiomatica quantitativa*, fondata sul numero N di rette parallele, producono le stesse geometrie (nello schema della tabella 1, $\mathcal{E}$ sta per ESISTENZA, $\mathcal{U}$ per UNICITÀ e sono tagliati gli assiomi sovrabbondanti).

La soluzione del Problema dei tre punti. La geometria preassoluta permette di affrontare e risolvere il Problema dei tre punti posto all'inizio. Il METATEOREMA DI EQUIVALENZA dà la soluzione completa della parte **A**, mentre la definizione preassoluta di *interno* di un triangolo dà la soluzione completa della parte **B**: nelle geometrie assoluta ed ellittica doppia esiste un solo triangolo di vertici i punti A, B, C e di lati i segmenti AB, AC, BC; nella geometria ellittica singola esistono quattro triangoli di vertici i punti A, B, C. Sebbene questo risultato sia noto, in realtà contiene in sé un elemento di novità: la *dimostrazione* con il metodo assiomatico che non vi sono altre geometrie oltre a queste, a conferma della valenza metateorica di Γ.

7. Euclide e la geometria preassoluta

Tra le due geometrie, assoluta e preassoluta, si scoprono – sorprendentemente – numerosi ed interessanti legami non solo per il consistente numero di teoremi condivisi, ma soprattutto per il criterio metodologico: entrambe contrassegnate da un approccio geometrico-qualitativo, nell'assoluta il piano può essere solo imploso o esploso, nella preassoluta anche la retta può essere solo aperta o chiusa ed il punto solo singolo o doppio.

Teoremi delle geometrie assoluta di Euclide e preassoluta. Il sistema Γ è sottosistema della geometria aperta $\Gamma_A = \Gamma + \mathcal{A}$ (la *vecchia* geometria assoluta) e quindi *tutti* i teoremi preassoluti sono anche assoluti, esattamente come quelli assoluti sono sia euclidei che iperbolici. Rispetto alla geometria assoluta degli *Elementi*, da quella preassoluta restano escluse soltanto le PROPOSIZIONI 16 (*Un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascun angolo interno non adiacente*), 17 (*La somma di due angoli di un triangolo è minore di un angolo piatto*), la seconda parte della 21 (*L'angolo che sottende un qualunque lato di un triangolo e che ha il vertice all'interno dello stesso è maggiore dell'angolo opposto a tale lato*) e della 26 (*Secondo criterio "generalizzato" di congruenza dei triangoli*), nonché le PROPOSIZIONI 27, 28 e 31: queste non sono teoremi preassoluti perché, essendo fondate sul POSTULATO II in modo essenziale (si dimostra che il postulato ne è non solo condizione sufficiente ma anche necessaria), ammettono controesempi nella geometria chiusa. Allorché la geometria preassoluta viene specializzata mediante gli enunciati *indecisi* $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$ o le loro negazioni, si riescono a dimostrare tutti i teoremi delle corrispondenti geometrie elementari; questi possono essere riguardati come teoremi preassoluti condizionati dall'inserimento di ulteriori ipotesi: ad esempio, se $\mathcal{B}$ è un teorema della geometria aperta $\Gamma + \mathcal{A}$ allora, per il teorema di deduzione, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ è teorema di Γ.

La teoria delle parallele di Euclide. Per dirimere l'ostica questione delle rette parallele il genio di Alessandria sviluppa al massimo grado il *corpus* dei teoremi della geometria assoluta cercando di evitare l'applicazione del problematico $\mathcal{Q}$. Fino alla PROPOSIZIONE 26 dimostra *tutte* le proprietà geometriche preliminari alla teoria delle parallele (PROPOSIZIONI 27-31) e se da un lato con le PROPOSIZIONI 23 (*Costruire su una retta e un suo punto un angolo uguale a un angolo dato*), 27 e 31 assicura l'ESISTENZA, dall'altro con $\mathcal{Q}$ dimostra la PROPOSIZIONE 29 – inversa della 28 – e la PROPOSIZIONE 30 (*Parallele alla stessa retta sono parallele tra loro*) – equivalente alla moderna UNICITÀ.
La bimillenaria affannosa ricerca di proposizioni sostitutive di $\mathcal{Q}$ aveva prodotto una miriade di enunciati che gli risultano equivalenti *soltanto* nella geometria assoluta. Il METATEOREMA DI UNICITÀ secondo cui gli *unici* enunciati equivalenti a $\mathcal{Q}$ nel sistema Γ sono essenzialmente le PROPOSIZIONI 29 e 30 costituisce un risultato sino ad oggi sconosciuto e comunque sorprendente perché, facendo svanire in un battibaleno tutte le proposizioni non euclidee escogitate per detronizzare $\mathcal{Q}$, ne esalta l'essenzialità geometrica. L'insostituibile postulato gioca un ruolo chiave per esprimere l'unicità della parallela non solo nella geometria assoluta – intuizione formidabile del suo creatore –, ma addirittura nell'ancor più fondamentale geometria preassoluta: il "brutto anatroccolo" mostra di essere il "cigno più bello" della Geometria. Le teorizzazioni delle nozioni di UNICITÀ ed ESISTENZA, consegnate da Euclide alla storia della matematica nelle PROPOSIZIONI 30 e 31 conclusive della teoria delle parallele, non solo sono i cardini della sua geometria, ma la loro indipendenza nella nuova geometria preassoluta costituisce il fondamento assiomatico delle geometrie non-euclidee che da essa scaturiscono. Il parallelismo è dunque una tappa cruciale della costruzione teorica di Euclide, in nessun caso un principio fondante come accadrà invece nell'assiomatica classica. Il matematico greco, evitando le soluzioni semplificatrici delle moderne teorie fondate sul quantitativo ASSIOMA DELLE PARALLELE, aveva capito che la risposta all'interrogativo aristotelico andava ricercata nella natura geometrica profonda degli enti fondamentali.

La *Geometria Preassoluta*, controrivoluzione euclidea della rivoluzione non-euclidea. La scoperta ottocentesca delle geometrie non euclidee scatenò la ben nota rivoluzione culturale della matematica: abbandonate le vecchie certezze assolute fondate su postulati "evidenti", le nuove teorie matematiche furono costrette a cercare il loro fondamento sull'assunzione di assiomi non-contraddittori e per il resto arbitrari. Se la perdita dell'unicità del sapere è stato un passo obbligato all'ampliamento delle conoscenze, la conquistata molteplicità ha ceduto spazio logico a nuovi possibili modelli cognitivi. È questa la ragione per cui la diversità dei sistemi assiomatici classici delle geometrie elementari non consente di escludere a priori l'esistenza di altre geometrie "esotiche" i cui punti, rette e piani possono ricevere strutture arbitrarie.

Tenendo fermi i POSTULATI III, IV e le nozioni comuni del sistema di Euclide – corrispondenti ai moderni assiomi di congruenza –, la geometria preassoluta riesce ad implementare il sistema euclideo in modo tale che i tre POSTULATI I, II, V, assieme alle rispettive negazioni, permettono di catturare *tutte* e *sole* le quattro geometrie elementari, legittimando finalmente la qualifica di non-euclidee anche per le due geometrie ellittiche. La forma compatta dei POSTULATI I, II ne consente, nel contesto preassoluto, una doppia interpretazione: il POSTULATO I richiede l'esistenza di (almeno) una retta orientata congiungente due punti arbitrari e nel contempo ammette l'esistenza di punti singoli (assioma $\mathcal{S}$ "usato" da Euclide), senza escludere l'esistenza di punti doppi (assioma $\mathcal{D} = \neg\mathcal{S}$); il POSTULATO II ammette che la "retta limitata" sia prolungabile illimitatamente all'infinito in modo da non far ritorno su se stessa (assioma $\mathcal{A}$ "usato" da Euclide), senza escludere però che il prolungamento illimitato possa produrre, come aveva ipotizzato Riemann, una linea finita che ritorni su se stessa (assioma $\mathcal{C} = \neg\mathcal{A}$). Dal canto suo il POSTULATO V enunciato da Euclide in modo chiaro e inequivoco mostra di essere, assieme alle PROPOSIZIONI 29 e 30, ad esso equivalenti nel contesto preassoluto, non sostituibile nella formulazione della nozione di UNICITÀ, con buona pace di coloro che ne hanno invece patrocinato la sostituibilità con tutti quegli enunciati che gli sono equivalenti nel *solo* contesto della geometria assoluta.

Il sistema degli *Elementi* rivela inattesi e profondi legami con l'assetto unitario della geometria preassoluta la quale, generalizzando le nozioni euclidee punto-retta-piano tramite lo studio della loro *struttura*, mostra di cogliere l'essenza dei concetti geometrici, ricomponendo così, nello stile non (ancora) tramontato del geomètra di Alessandria, l'uni(ci)tà della Geometria a suo tempo negata dalla rivoluzione non-euclidea. Una controrivoluzione euclidea della rivoluzione non-euclidea.

Bibliografia: [12] Riemann, B. (1994), *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, Torino, Bollati Boringhieri.

[*] Ex insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Oberdan" di Trieste; e-mail: franco.rupeni@gmail.com
[**] Insegnante presso il Liceo Scientifico "G. Marinelli" di Udine; e-mail: a.zampa@alice.it

Questo lavoro è stato presentato in aprile, a Spoleto, durante l'ultimo congresso nazionale della MATHESIS (10-12 aprile 2014).