ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 196 – Pubblicato il 02 – 01 – 2015

I numeri $\mathbf{P}(k, m)$

di Gabriele Pupolin [**]

[*Segue dal n.* 195]
Per $\mathbf{P}(k+1, k+1)$, ricordando che $\mathbf{P}(k, k+1) = 0$, si ha
$\mathbf{P}(k+1, k+1) = [k + (k+1]\, \mathbf{P}(k, k) + (k+1)\, \mathbf{P}(k, k+1) =$
$= (2k+1)\, \mathbf{P}(k, k)$; (8)
Applicando tale relazione da $\mathbf{P}(1, 1)$, si perviene a

$$\mathbf{P}(k,k) = \prod_{i=1}^{k} (2i-1);$$

per $\mathbf{P}_{k,1}$, con $k > 0$, si ha:

$$\mathbf{P}(k,1) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1+k}{i} \binom{1+k-i}{1-i} = 1 \cdot 1 - (1+k) \cdot 0 = 1 . \qquad (9)$$

In base a quanto sopra, essendo $\mathbf{P}(1, 1) = 1$, tutti i naturali $\mathbf{P}(k, m)$, per valori di $k \geq 1$ e per $1 \leq m \leq k$, sono maggiori di zero avendo tra i loro addendi almeno il valore $\mathbf{P}(1, 1) = 1$. Ciò permette di confermare la non ortogonalità della (3) per valori di $k \geq 1$ e per $1 \leq m \leq k$.
I numeri $\mathbf{P}(k, m)$ costituiscono una matrice numerica che viene sotto riportata.

k\m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	3					
3	0	1	10	15				
4	0	1	25	105	105			
5	0	1	56	490	1260	945		
6	0	1	119	1918	9450	17325	10395	
7	0	1	246	6825	56980	190575	270270	135135

Numeri **P(k,m)**

Essi presentano le seguenti proprietà:
1) $\mathbf{P}(0, 0) = 1$
2) $\mathbf{P}(0, m) = 0$ per $m > 0$;
3) $\mathbf{P}(k, 0) = 0$ per $k > 0$;
4) $\mathbf{P}(k, 1) = 1$ per $k > 0$;
5) $\mathbf{P}(k,k) = \prod_{i=1}^{k} (2i-1) \quad per \ k > 0$;
6) $\mathbf{P}(k+1, m) = m\, \mathbf{P}(k, m) + (k+m)\, \mathbf{P}(k, m-1)$ per $k > 0$ e $m > 0$;
7) $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i P(k, k-i) = k!$ (si omette la dimostrazione per induzione).

3. Relazione tra i numeri $\mathbf{P}(k, m)$ e i numeri di Stirling di 1° specie

I numeri $\mathbf{P}(k, m)$ generano i numeri di Stirling di 1° Specie in base alla relazione

$$\left\{ \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{k-m} (-1)^i \binom{2k-m-1-i}{2k-2m-i} \mathbf{P}(k-m, k-m-i) \right. \qquad per \quad k \geq m \geq 1 \qquad (10)$$

Dimostrazione.
È vera per $k = 1$ ed $m = 1$ in quanto $1{\cdot}1 = 1$; è vera per $k = 2$ e per $1 \leq m \leq 2$ in quanto: per $k = 2$ ed $m = 1$ si ha $1{\cdot}1 - 1{\cdot}0 = 1$; per $k = 2$ ed $m = 2$ si ha $1{\cdot}1 = 1$; è vera per $k = m$, con $k > 1$, in quanto

$\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} = \binom{k-1}{0} \mathbf{P}(0,0) = 1$; è vera per $m = 1$, con $k > 1$, in quanto:

$$\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{2k-2-i}{2k-2-i} \mathbf{P}(k-1, k-1-i) = (k-1)!$$

(si veda la proprietà 7 del punto precedente); supposta vera per k e per $2 \leq m < k$, si dimostra vera per $(k+1)$ e per $2 \leq m < (k+1)$. I numeri di Stirling di 1° Specie per $k \geq 2$ e per $m \geq 2$ soddisfano la relazione

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ m \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ m-1 \end{bmatrix}; \qquad (11)$$

Se la (10) è vera per $\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$ e per $\begin{bmatrix} k \\ m-1 \end{bmatrix}$, allora lo è per $\begin{bmatrix} k+1 \\ m \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ m \end{bmatrix} = k \sum_{i=0}^{k-m} (-1)^i \binom{2k-m-1-i}{2k-2m-i} \mathbf{P}(k-m, k-m-i) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m-i}{2k-2m+2-i} \mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i) .$$

Eseguendo il cambio di variabile $(i+1) = i'$ nella prima sommatoria ed aggiungendo e togliendo il termine
$\sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m+1-i}{2k-2m+2-i} \mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i)$, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ m \end{bmatrix} = k \sum_{i'=1}^{k-m+1} (-1)^{i'-1} \binom{2k-m-i'}{2k-2m-i'+1} \mathbf{P}(k-m, k-m-i'+1) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m-i}{2k-2m+2-i} \mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i) +$$
$$- \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m+1-i}{2k-2m+2-i} \mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m+1-i}{2k-2m+2-i} \mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i) =$$
$$= -k \sum_{i=1}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m-i}{2k-2m-i+1} \mathbf{P}(k-m, k-m-i+1) +$$
$$- \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m-i}{2k-2m+1-i} \mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m+1-i}{2k-2m+2-i} \mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i) .$$

Sostituendo il termine $\mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i)$, presente nella seconda sommatoria, con la relazione dei numeri $\mathbf{P}(k, m)$,
$\mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i) = (k-m+1-i)\, \mathbf{P}(k-m, k-m+1-i) +$
$(2k-2m-i+1)\, \mathbf{P}(k-m, k-m-i)$ (12)
si ottiene :

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ m \end{bmatrix} = -k \sum_{i=1}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m-i}{2k-2m-i+1} \mathbf{P}(k-m, k-m+1-i) +$$
$$- \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m-i}{2k-2m+1-i} (k-m+1-i) \mathbf{P}(k-m, k-m+1-i) +$$
$$- \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m-i}{2k-2m+1-i} (2k-2m-i+1) \mathbf{P}(k-m, k-m-i) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-m+1} (-1)^i \binom{2k-m+1-i}{2k-2m+2-i} \mathbf{P}(k-m+1, k-m+1-i) .$$

Estendendo la seconda sommatoria da i = 1 (essendo il termine per i = 0 nullo) e sommandola alla prima sommatoria, ponendo poi nella terza sommatoria (i + 1) = i' ed eliminando l'ultimo termine della stessa, corrispondente a i' = (k – m + 2), in quanto nullo, si ottiene:

$$\begin{bmatrix}k+1\\ m\end{bmatrix}=$$

$$-\sum_{i=1}^{k-m+1}(-1)^i\binom{2k-m-i}{2k-2m+1-i}(2k-m+1-i)\mathbf{P}(k-m,k-m+1-i)+$$

$$+\sum_{i'=1}^{k-m+1}(-1)^{i'}\binom{2k-m-i'+1}{2k-2m+2-i'}(2k-2m+2-i')\mathbf{P}(k-m,k-m+1-i')+$$

$$\sum_{i=0}^{k-m+1}(-1)^i\binom{2k-m+1-i}{2k-2m+2-i}\mathbf{P}(k-m+1,k-m+1-i)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{k-m+1}(-1)^i\left[\binom{2k-m-i}{2k-2m+1-i}(2k-m+1-i)+\right.$$

$$\left.-\binom{2k-m-i+1}{2k-2m+2-i}(2k-2m-i+2)\right]\mathbf{P}(k-m,k-m+1-i)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-m+1}(-1)^i\binom{2k-m+1-i}{2k-2m+2-i}\mathbf{P}(k-m+1,k-m+1-i).$$

Il termine tra parentesi quadra è nullo in quanto:

$$\frac{(2k-m-i)!\,(2k-m+1-i)}{(2k-2m+1-i)!\,(m-1)!}-\frac{(2k-m-i+1)!\,(2k-2m-i+2)}{(2k-2m+2-i)!\,(m-1)!}=$$

$$\frac{(2k-m+1-i)!}{(2k-2m+1-i)!\,(m-1)!}-\frac{(2k-m-i+1)!}{(2k-2m+1-i)!\,(m-1)!}=0\,.$$

Ne segue che:

$$\begin{bmatrix}k+1\\ m\end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{k-m+1}(-1)^i\binom{2k-m+1-i}{2k-2m+2-i}\mathbf{P}(k-m+1,k-m+1-i)\,,\quad (13)$$

dimostrando la validità della (10) per qualsiasi $k \geq 2$ in quanto la (13) corrisponde alla (10) ove a k sia sostituito (k + 1).
La rappresentazione grafica della (10) viene sotto riportata.

(2k-m-1-i)↓ \ (m-1)→	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	-1	1					
2	1	-2	1				
3	-1	3	-3	1			
4	1	-4	6	-4	1		
5	-1	5	-10	10	-5	1	
6	1	-6	15	-20	15	-6	1
7	-1	7	-21	35	-35	21	-1
8	1	-8	28	-56	70	-56	28
9	-1	9	-36	84	-126	126	-84
10	1	-10	45	-120	210	-252	210

Combinazioni a segno alterno

(k-m)↓ \ (k-m-i)→	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	3			
3	0	1	10	15		
4	0	1	25	105	105	
5	0	1	56	490	1260	945

Numeri P(k,m)

Caso k = 6 con
m = 1 m = 2 m = 3
m = 4 m = 5 m = 6

1. Conclusioni

La (1) è costituita da una somma di prodotti ognuno dei quali contiene tre fattori nella variabile i. La stessa (1) è scindibile, utilizzando i numeri $\mathbf{P}(k, m)$, in somme di prodotti, rappresentate dalla (3) e dalla (10), in cui compaiono termini contenenti due fattori nella variabile i. La rappresentazione con matrici numeriche dei prodotti presenti nella (3) e nella (10) dà la capacità di una miglior interpretazione delle espressioni e la possibilità di utilizzarle come strumenti nella risoluzione di espressioni più complesse.
Oltre ad essere particolarmente funzionali per quanto sopra detto, i numeri $\mathbf{P}(k, m)$ hanno anche un significato combinatorio. Il termine $\mathbf{P}(k, m)$ rappresenta il numero di Stirling di seconda specie $\left\{\begin{matrix}k+m\\ m\end{matrix}\right\}$ privato numericamente di tutte le partizioni in cui compaiano gruppi costituiti da un solo elemento. Ciò giustifica il fatto che la (2) sia uguale a zero in quanto, quando (2k +1) elementi sono distribuiti su (k + 1) parti, viene violato il vincolo di almeno due elementi per ogni parte richiesto dai $\mathbf{P}(k, m)$.

Sotto l'aspetto statistico possono rappresentare vari esperimenti, di cui sotto ne viene riportato uno.
Sia data una micro macchina costituita da m parti, necessariamente tutte in funzione affinché la micro macchina possa funzionare. Nelle stesse m parti possono essere inseriti (k +m) elementi aventi tutti la stessa funzionalità. La distribuzione dei (k + m) elementi nelle m parti sia aleatoria. L'operazione di inserimento procederà finché ogni parte abbia almeno un elemento e quindi la micro macchina entri in funzione. Sia possibile contare quanti elementi in totale sono stati somministrati alla micro macchina. In caso di fuori servizio di un elemento si potranno avere per la bmicro macchina due possibili effetti.
1) Se l'elemento si trova in una parte ove vi sia più di un elemento, entrerà in funzione uno degli altri presenti nella sua parte (riserve calde di processo).
2) Se l'elemento si trova in una parte ove è da solo, ciò comporterà il fermo della macchina.
Il numero $\mathbf{P}(k, m)$ rappresenta le configurazioni di funzionamento dopo un primo guasto rispetto le configurazioni S(k+m, m) iniziali. Il rapporto $\mathbf{P}(k, m)$ / $S(k + m, m)$ rappresenta la probabilità di funzionamento dopo il primo guasto. Da ciò si può calcolare la *Disponibilità* della macchina una volta nota l'affidabilità di un elemento e il tasso di riparabilità degli elementi.

[**] Socio nazionale Mathesis - Preside CIFI (Collegio Ingegneri Ferroviari Italiani) – Venezia – e-mail: gabriele.pupolin@gmail.com

«…Terribilis est locus iste»

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 192]
Immersi in uno spazio simile, assume un ruolo importante la funzione continua f; è, infatti, f che determina la separazione.

Insiemi compatti

Siamo sempre in questo sito desolato, con solo 5 punti disponibili. Per un insieme $A \subset X$, sia $A^* = \{G_i\}$ una classe di sottoinsiemi aperti di X tale che $A \subset \cup_i G_i$. Allora A^* è un ricoprimento di aperti di A. Se esiste in A^* una sottoclasse finita di aperti che ricoprono A, cioè se

$$\exists G_{i_1},G_{i_2},\dots,G_{i_m}\in A^*: A\subset G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup\dots\cup G_{i_m}\,, \qquad (8)$$

allora si dice che A^* ammette un sotto ricoprimento finito di A.
Un sottoinsieme A di uno spazio topologico $\{X, T\}$ è compatto se e solo se ogni ricoprimento di aperti di A (occhio all'*ogni*!) è riducibile a un ricoprimento finito (occhio al *finito*!) di aperti.
Consideriamo $X=\{a, b, c, d, e\}$, $A=\{a, b, c\}$ e, ancora, $T_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$. Possiamo dire che A è un compatto per X, rispetto a T_2? Gli insiemi aperti che ricoprono A sono: $\{\{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$. È possibile estrarre da questo insieme un sotto ricoprimento finito di aperti. Infatti, esso è: $A^*=\{\{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$; concludo che A è un compatto per la topologia $\{X, T_2\}$.

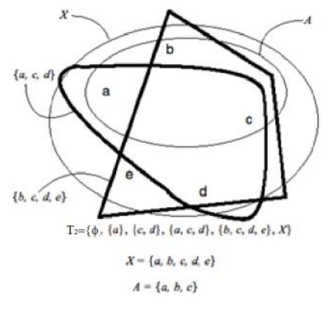

Fig. 2 (Grafico di L.C.). Idea di ricoprimento avuta nel sogno

In presenza di un insieme generatore finito, ogni insieme generato è compatto. È, infatti, ragionevole che un sotto insieme finito di X ammetta un ricoprimento finito di aperti. Lo stesso X è compatto. Osservo, però, che nel caso di insiemi finiti, un sottoinsieme può essere compatto anche se non risulta chiuso: A, infatti, abbiamo visto (MatematicaMente n. 187) che non è chiuso (perché i suoi punti limite non gli appartengono) e tuttavia è compatto.

[*Segue al numero* 200]