ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 197 – Pubblicato il 01 – 02 – 2015

Sulla definizione di funzione continua

Luciano Corso [1]

Abstract: The mathematical concept of continuous (or discontinuous) function is controversial. The different points of view have different interpretations when we have to decide if a function is continuous at a point. To clear up this concept, we propose a topological approach to the question and our method is applicable to both the analysis of functions on finite and discrete sets, and functions on continuous sets. The mathematical object that we consider important for this kind of analysis is the triple $\{\{X,T_X\}, \{Y, T_Y\}, f\}$, where $\{X, T_X\}$ is the topological space of the domain, $\{Y, T_Y\}$ is the topological space of codomain and f is a function from X to Y.

1. Sulla Continuità di una funzione

Consideriamo due spazi topologici $\{X, T_X\}$ e $\{Y, T_Y\}$ e una funzione $f : X \to Y$. La funzione f è continua se e solo se la controimmagine (o immagine inversa) di ogni aperto G_Y di T_Y è un aperto G_X di T_X. Formalmente si scrive:

$$\left(f\colon X \to Y \text{ è continua}\right) \Rightarrow \left(\forall G_Y \in T_Y,\ f^{-1}(G_Y) = G_X \in T_X\right) \qquad (1.1)$$

Sulla base di questa definizione, la continuità di una funzione è sempre relativa a T_X e T_Y. Perciò essa dipende da una terna di oggetti matematici: $\{\{X, T_X\}, \{Y, T_Y\}, f\}$ ed è una proprietà globale del sistema (la terna).

Verifichiamo il significato di quanto espresso dalla definizione prima su uno spazio topologico con insiemi generatori X e Y costituiti da pochi punti (insiemi discreti e finiti) e poi su $\{\mathbf{R}, T_{\mathbf{R}}\}$, cioè su $\mathbf{R}$ e la sua topologia usuale. Notiamo che

1) X e Y possono essere insiemi di natura qualsiasi e possono essere composti dagli stessi elementi; in tal caso $X = Y$. Anche T_X e T_Y possono essere uguali.

2) La continuità di f va valutata sempre con riferimento alle due topologie (peraltro arbitrarie), T_X e T_Y, prese in considerazione.

3) $\mathbf{R}$ ha una sua topologia, $T_{\mathbf{R}}$, che deve sempre essere presa in considerazione, anche se spesso viene sottointesa. Una base per la topologia usuale $T_{\mathbf{R}}$ è formata dagli intervalli aperti (α, β), con $\alpha < \beta$. In altre parole, ogni insieme aperto $G \in T_{\mathbf{R}}$ è unione di intervalli aperti [B.4].

Prendendo lo spunto da [B.3], sia $\{X, T_X\}$ uno spazio topologico in cui $X = \{a, b, c, d\}$ e $T_X = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$; sia, inoltre, $\{Y, T_Y\}$ un secondo spazio topologico in cui $Y = \{x, y, z, w\}$ e $T_Y = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}, Y\}$. Poiché $|X| = 4$ e $|Y| = 4$, il numero di funzioni possibili da un 4-insieme a un 4-insieme è $4^4 = 256$. Di queste, consideriamo le due funzioni da X a Y: f e g (Grafico 1).

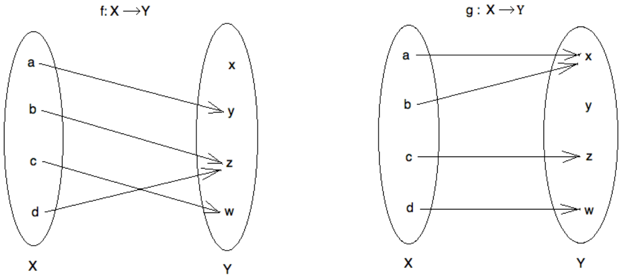


Grafico 1: le funzioni f e g da X a Y.

Queste funzioni sono tali in quanto soddisfano la definizione stessa di funzione che impone che per ogni elemento del dominio corrisponda uno ed uno solo elemento del codominio.

Possiamo notare che le due funzioni non sono né iniettive, né suriettive.

Verifichiamo se esse sono funzioni continue oppure no. Dalla definizione di funzione continua (1.1), questa proprietà va verificata sulle topologie T_Y e T_X.

Tabella 1

$f^{-1}(G_Y)$		$g^{-1}(G_Y)$	
$\varnothing \in T_Y$	$\varnothing \in T_X$	$\varnothing \in T_Y$	$\varnothing \in T_X$
$\{x\} \in T_Y$	$\varnothing \in T_X$	$\{x\} \in T_Y$	$\{a, b\} \in T_X$
$\{y\} \in T_Y$	$\{a\} \in T_X$	$\{y\} \in T_Y$	$\varnothing \in T_X$
$\{x, y\} \in T_Y$	$\{a\} \in T_X$	$\{x, y\} \in T_Y$	$\{a, b\} \in T_X$
$\{y, z, w\} \in T_Y$	$X \in T_X$	$\{y, z, w\} \in T_Y$	$\{c, d\} \notin T_X$
$Y \in T_Y$	$X \in T_X$	$Y \in T_Y$	$X \in T_X$

Dalla tabella 1 si osserva che con f^{-1} da aperti di T_Y si arriva sempre ad aperti di T_X. Perciò f è continua in (occhio!) $\{\{X, T_X\}, \{Y, T_Y\}, f\}$; mentre con g^{-1}, a partire da $\{y, z, w\}$ si arriva a $\{c, d\}$; questo insieme, però, non appartiene a T_X (non è un aperto nella topologia T_X). Perciò g non è continua in $\{\{X, T_X\}, \{Y, T_Y\}, g\}$. Insomma, la continuità di una funzione non dipende solo dalla funzione (non è cioè solo una proprietà della funzione), ma da una terna di enti matematici: lo spazio topologico del dominio, quello del codominio e la funzione. Per quanto qui detto, se dovessimo cambiare la topologia T_X, potrebbe succedere che la stessa funzione f non sia più continua. A riprova di ciò, si consideri una diversa topologia di T_Y. Sia essa

$T_Y^* = \{\varnothing, \{x\}, \{z\}, \{x, z\}, \{x, z, w\}, Y\}$.

In tal caso $f^{-1}(\{x, z\}) = \{b, c\}$ che non è un aperto di T_X. Perciò in questa nuova topologia f non è più continua.

2. Sulla continuità di una funzione in un punto

Ora valutiamo quando una funzione è continua in un punto x_0. Per quanto detto, non ha senso valutare la continuità di una funzione in un punto in cui essa non è definita. Perciò, in x_0 la funzione deve esistere: altrimenti non è né continua, né discontinua; semplicemente non c'è, non è definita.

Occorre ora partire considerando, per analogia ristretta, quanto fin qui detto. Dalla (1.1) si può dedurre che per ogni $y = f(x) \in Y$, f è continua se ogni aperto $G_Y \in T_Y$ tale che $y \in G_Y$ ha come controimmagine $f^{-1}(G_Y)$ aperti di T_X che abbiano $x \in X$ come elemento. Allora si può dire che una funzione $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ *sse* per ogni aperto G_Y di T_Y, tale che $f(x_0) \in G_Y$, la sua controimmagine, $f^{-1}(G_Y)$, in X genera aperti $G_X \in T_X$ che abbiano x_0 come elemento. In simboli:

$$(f : X \to Y \text{ è continua in } x_0) \Rightarrow$$
$$(\forall\, G_Y \in T_Y,\ f(x_0) \in G_Y,\ f^{-1}(G_Y) = G_X \in T_X,\ x_0 \in G_X) \qquad (2.1)$$

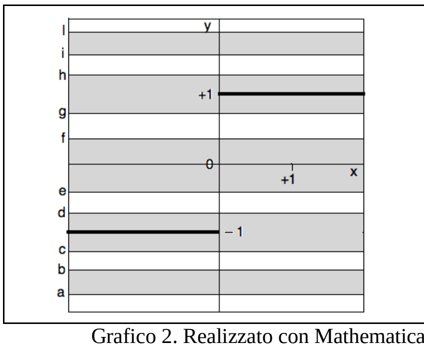
La funzione è discontinua in x_0 *sse* esiste un aperto G_Y a cui $f(x_0)$ appartiene la cui controimmagine $f^{-1}(G_Y)$, non è un aperto G_X di T_X che abbia x_0 come elemento.

Osserviamo che la (2.1) corrisponde esattamente alla definizione classica, del tipo ε-δ, di continuità di una funzione in un punto x_0 così come è riportata in (B.1) e altri autori; ma in questo nostro caso essa risulta più generale. Infatti, implicitamente, in (B.1) si dà per scontato che x_0 sia un punto di accumulazione.

Con riferimento al nostro esempio verifichiamo se $x_0 = c$ è un punto di continuità per f e per g, negli spazi topologici T_X e T_Y presi in considerazione.
Per f, $f(c) = w$. L'elemento w, in T_Y, ammette solo due aperti che lo contengono: $\{y, z, w\}$ e Y. Peraltro, all'aperto $\{y, z, w\}$ di T_Y corrisponde in T_X l'unico aperto X che contiene c (inoltre $f^{-1}(Y) = X$). Perciò la funzione f è continua in $x_0 = c$. Così si può dimostrare la continuità di f in ogni altro punto di X. Se una funzione ha come proprietà globale la continuità, allora essa vale anche come proprietà puntuale. D'altra parte, se prendiamo la funzione g, c ha la sua immagine $g(c) = z$ che appartiene all'aperto $\{y, z, w\}$ e a Y di T_Y. Gli insiemi corrispondenti in T_X di questi due aperti sono $\{c, d\}$ e X. Quest'ultimo è un aperto cui appartiene c, ma $\{c, d\}$ non è un insieme aperto appartenente a T_X. Perciò in c la funzione g, secondo la terna $\{\{X, T_X\}, \{Y, T_Y\}, g\}$, non è continua.

Quanto fin qui esposto è un metodo generale di studio della continuità di una funzione. Abbiamo preso insiemi discreti e finiti, cioè sconnessi e irti di ostacoli, proprio per verificare la proprietà di continuità su funzioni con domini e codomini strani, certamente non usuali negli studi di analisi. Ora, sulla base di quanto qui espresso, verifichiamo l'utilità di questi metodi nel valutare la continuità delle funzioni e delle funzioni in un punto quando lo spazio topologico è **R** dotato dell'usuale topologia. Per ciò che abbiamo detto finora, la terna che dobbiamo prendere in considerazione in questo caso è $\{\{X_R, T_R\}, \{Y_R, T_R\}, f\}$, dove f è una funzione generica, e analizziamo la continuità (o la discontinuità) di f nella terna considerata, anche rispetto a un suo punto x_0.

Cominciamo ad analizzare la funzione (2.2).
La funzione è definita su $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ e assume solo due valori: –1, +1. La funzione per $x_0 = 0$ non è definita e quindi non ha senso parlare di continuità (o discontinuità) della funzione in questo punto. Per ogni altro valore di **R** essa è definita. Perciò, in condizioni prive di vincoli particolari, f ha dominio: $X_R = \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Scegliamo ora la topologia di X_R, T_{XR} che conviene che sia la topologia usuale di $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Essa è la topologia indotta data dalla classe di tutte le intersezioni di $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ con sottoinsiemi aperti di **R**. Consideriamo, poi, il codominio di f, Y_R. Ci conviene scegliere tutto **R** e la sua topologia usuale T_{YR}. Notiamo che f manda da $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ a $\{-1, +1\}$. Ora abbiamo la terna $\{\{X_R, T_{XR}\}, \{Y_R, T_{YR}\}, f\}$ che ci permette di verificare se f è continua. Applichiamo la regola. Prendiamo un generico punto x di X_R. La sua immagine è $f(x)$ e può essere solo o –1 o +1. In ogni caso, la controimmagine di ogni aperto G_Y, cui $y = f(x)$ appartiene, è un aperto di T_{XR}. Per esempio, se $x = \pi$, $f(x) = +1$. Nella topologia usuale di **R**, ogni aperto cui $f(x) = +1$ appartiene, ha controimmagine $\mathbf{R}^+\backslash\{0\}$ oppure $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, entrambi aperti di T_{XR} che contengono π. Perciò la funzione f è continua in ogni suo punto.



$$f : x \to \frac{x}{|x|} \qquad (2.2)$$

Grafico 2. Realizzato con Mathematica 5.1 e con Bitmap

Il grafico 2 fa notare che le fasce d'intervalli aperti G_Y di T_{YR} generano, con f^{-1}, in T_{XR} o il $\varnothing$ o $\mathbf{R}^+\backslash\{0\}$ o $\mathbf{R}^-\backslash\{0\}$ o $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ e ciò conferma quanto sopra detto. La funzione (2.2) è continua.

La funzione (2.3) (Grafico 3) è la funzione segno e differisce da (2.2) per essere definita su tutto **R**.

$$sign(x) = \begin{cases} x / |x| & \{x | x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\} \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

In questo caso, la funzione presenta un punto di discontinuità. Infatti, applicando la (2.1) si osserva che la controimmagine di alcuni aperti, cui $f(x = 0)$ appartiene, è $\{x = 0\}$ che, essendo complementare di $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ in **R**, è un chiuso e quindi non appartiene a T_{XR}.

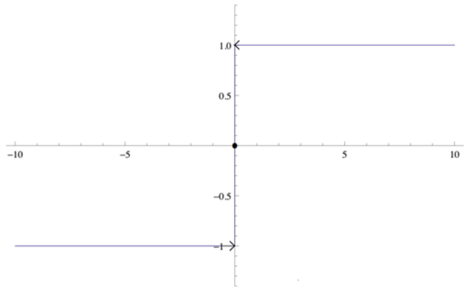


Grafico 3. La funzione (2.3) realizzata con Mathematica 5.1 e con BitMap

Analizziamo ora la funzione (2.4). La funzione è definita su tutto $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

$$g : x \to \frac{\sin(x)}{x} \qquad (2.4)$$

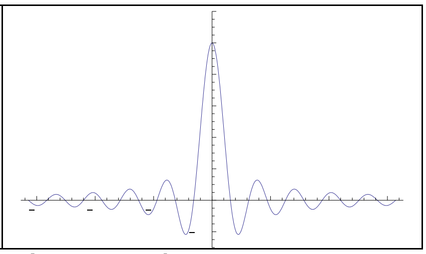


Grafico 4. Realizzato con Mathematica 5.1

Poiché in $x = 0$ la funzione non è definita, non ha senso valutare la continuità (o la discontinuità) in quel punto. Il codominio di g è ancora **R** esteso, anche se in realtà essa dà valori in un intervallo limitato. Consideriamo la topologia usuale di **R** e verifichiamo se, data la terna $\{\{X_R, T_{XR}\}, \{Y_R, T_{YR}\}, g\}$, la nostra g è continua. Per ogni $x \in X_R$, $g(x) = y \in Y_R$, in T_{YR} esiste una famiglia di aperti G_Y la cui controimmagine $g^{-1}(G_Y) = G_X \in T_{XR}$ contiene x. Perciò g è continua su tutto X_R. La variante a (2.4), che per $x = 0$ pone $g(x) = 3$, per analogia di metodo, non è continua; il punto di discontinuità è proprio $x = 0$ (punto in cui la funzione è definita ed è uguale a 3). Se consideriamo, invece, la variante di (2.4) dove s'impone che per $x = 0$ la funzione $\sin(x) / x = 1$, allora la funzione è continua in quel punto. Infatti, per ogni aperto G_Y del codominio tale che $g(x) = 1 \in G_Y$, corrisponde, come controimmagine, un aperto G_X del dominio cui $x = 0$ appartiene.

Riassumendo, sulla base di questo nostro punto di vista, definita la terna $\{\{X,T_X\}, \{Y,T_Y\}, f\}$, f può essere solo o continua o discontinua. Se prendiamo un'estensione X^* del dominio di una funzione, con $X \subset X^*$, in quei punti di X^* in cui f non è definita, essa è semplicemente non definita e si esclude così la possibilità di valutare sia la continuità sia la discontinuità della funzione in quei punti.
Per completare il quadro dei diversi punti di vista sulla continuità si considerino anche le tesi degli autori riportati nei riferimenti bibliografici [B.3], [B.4], [B.5], [B.6], [B.7], [B.8], [B.9], [B.10], [B.11], [B.12], [B.13], [B.14], [B.15].

Riferimenti bibliografici: [B.1] Robert A. Adams e Christopher Essex, Calcolo differenziale 1, Casa editrice Ambrosiana. [B.2] Tom Apostol, Analisi matematica, Calcolo vol. 1, Boringhieri. [B.3] Lipschutz Seymour, Teoria e problemi di TOPOLOGIA, collana SCHAUM, ETAS – Fabbri – Bompiani, Sonzogno, 1979. [B.4] Zamansky Marc, Itroduzione all'algebra e all'analisi moderna, Feltrinelli ed., Milano, 1976. [B.5] Rudin Walter, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill, Milano, 1991. [B.6] Barozzi G. C., Matarasso S., Analisi Matematica 1, Zanichelli, Bologna, 1990. [B.7] De Fabritiis C., Petronio C., Esercizi svolti e complementi di topologia e geometria, Bollati Boringhieri, Torino, 1997. [B.8] Smirnov V. I., Corso di matematica superiore I, Editori Riuniti, Mosca-Roma, 1976. [B.9] Keisler H. J., Elementi di analisi matematica, Piccin Editore, Padova, 1982. [B.10] Giusti E., Analisi Matematica 1, Bollati-Boringhieri ed., Torino, 1983. [B.11] Prodi G., Analisi Matematica, Bollati-Boringhieri, Torino, 1982. [B.12] Canuto C., Tabacco A., Analisi Matematica I, Springer, Milano, 2008. [B.13] James R. C., The Mathematics Dictionary (Fifth Edition). [B.14] Murray Spiegel, Analisi Matematica, Schaum – Etas Libri, Milano, 1990. [B.15] Corso L., Laforgia A., A proposito della definizione di funzione continua e di proprietà lineare dell'integrale, Periodico di Matematiche n. 3 Set-Dic 2014 Vol. 6 Serie XI Anno CXXIV, edizioni Mathesis. [B.16] MATHEMATICA 5.1, S. Wolfram Research Inc., University of Cambridge, 2010

[1] Consigliere nazionale Mathesis, di Verona, e-mail: lcorso@iol.it