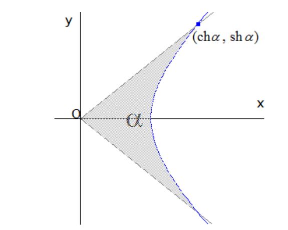
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 198 – Pubblicato il 02 – 03 – 2015



NUMERI DI FIBONACCI E SEZIONE AUREA

di Luca Granieri [*]

Numeri di Fibonacci e sezione aurea sono due temi, strettamente legati tra loro, molto gettonati nella divulgazione scientifica. Anche cartoni animati e film contengono talvolta riferimenti espliciti; si veda ad esempio: www.qedat.com/movie math.

Il legame dei numeri di Fibonacci con la sezione aurea è, come detto, un tema dibattuto, ma molto raramente vengono fornite indicazioni per una qualche giustificazione. I cosiddetti numeri di Fibonacci sono definiti per ricorrenza da

$$F_0 = 0 \ , \ F_1 = 1 \ , \ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \,.$$

Dunque, ogni numero di Fibonacci (dal terzo in poi) è somma dei due numeri che lo precedono. Così, ad esempio, i primi 6 numeri di Fibonacci sono

$$F_0 = 0 \ , \ F_1 = 1 \ , \ F_2 = 1 \ , \ F_3 = 2 \ , \ F_4 = 3 \ , F_5 = 5 \ , \ F_6 = 8.$$

Pare che questi numeri siano stati introdotti per la prima volta per descrivere le discendenze di una coppia di conigli.

La sezione aurea (o numero aureo), che indichiamo con ϕ, è invece la soluzione positiva dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$. Dunque la sezione aurea è il numero (irrazionale)

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ .$$

La sezione aurea ha una lunghissima storia (si veda ad esempio [B.3]) e certamente non è subito chiaro perché sia legata al comportamento dei conigli. Da dove deriva il legame tra questi due oggetti apparentemente sconnessi tra loro?

Se si considera il rapporto F_{n+1} / F_n si nota che al crescere dell'indice n ci si avvicina proprio al numero aureo ϕ. In effetti, detto $l = \lim_{n\to+\infty} (F_{n+1} / F_n)$ si ha

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{l} \ .$$

Pertanto l è soluzione dell'equazione $l^2 - l - 1 = 0$, ovvero $l = \phi$. Questo è talvolta quanto si trova scritto nel materiale divulgativo sul tema. O, talvolta, si aggiunge laconicamente che i numeri di Fibonacci sono anche legati alla sezione aurea dalla relazione

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (1-\phi)^n \tag{1}$$

Ma perché il limite del rapporto tra due numeri consecutivi di Fibonacci esiste ed è finito? Una giustificazione richiede un po' di sforzo, comunque alla portata ad esempio di studenti dell'ultimo anno delle superiori o ai primi di università. Facciamo notare che occorre giustificare soltanto l'esistenza del limite. Poi, i calcoli già fatti lo individuano correttamente. A tal fine basterebbe verificare che la successione F_{n+1} / F_n è di Cauchy, e poi ricordare che ogni successione di Cauchy ammette limite. Sono utili per la dimostrazione alcune proprietà dei numeri di Fibonacci, che si possono ricavare utilizzando il principio d'induzione (per una introduzione elementare di veda [B.2]).

Lemma 1. *Per i numeri di Fibonacci valgono le seguenti proprietà*:

1) $\forall \, n \geq 1 : F_n \geq 1;$
2) $\forall \, n \geq 5 : F_n \geq n;$
3) $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;
4) $F_{n+1}^2 - F_{n+2} F_n = (-1)^{n+2}$.

In generale, vale poi anche il seguente

Lemma 2. *Si consideri* $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. *Allora si verifica che*

$$0 \leq a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n \leq a_1 \,.$$

A questo punto, si considerino due indici $n \neq m$. Senza perdere di generalità possiamo assumere che sia $m > n$. Utilizzando i due lemmi precedenti possiamo valutare

$$\left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_{m+1}}{F_m} \right| =$$

$$\left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} + \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+3}}{F_{n+2}} \ldots - \frac{F_m}{F_{m-1}} + \frac{F_m}{F_{m-1}} - \frac{F_{m+1}}{F_m} \right| =$$

$$\left| \frac{F_{n+1}^2 - F_{n+2} F_n}{F_n F_{n+1}} + \frac{F_{n+2}^2 - F_{n+3} F_{n+1}}{F_{n+1} F_{n+2}} + \ldots + \frac{F_m^2 - F_{m+1} F_{m-1}}{F_{m-1} F_m} \right| =$$

$$\left| \frac{(-1)^{n+2}}{F_n F_{n+1}} + \frac{(-1)^{n+3}}{F_{n+1} F_{n+2}} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{F_{m-1} F_m} \right| =$$

$$\left| \frac{1}{F_n F_{n+1}} - \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}} + \ldots + (-1)^{m-n-1} \frac{1}{F_{m-1} F_m} \right| \leq$$

$$\frac{1}{F_n F_{n+1}} \leq \frac{1}{F_n} \leq \frac{1}{n} \to 0 \,.$$

Dunque la successione F_{n+1} / F_n è di Cauchy e per quanto già visto ammette quale limite proprio il numero aureo ϕ .

Per quanto riguarda la (1), a posteriori, detti a_n i numeri corrispondenti al secondo membro della (1), possiamo valutare che

$$a_n + a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - (1-\phi)^n + \phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n (1+\phi) - (1-\phi)^n (2-\phi) \right).$$

Sfruttando il fatto che ϕ soddisfa la $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, si ha $\phi^2 = 1 + \phi$ e anche $(1 - \phi)^2 = 1 + \phi^2 - 2\phi = 2 - \phi$. Pertanto

$$a_n + a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n+2} - (1-\phi)^{n+2} \right) = a_{n+2}$$

Dunque, sempre tenendo presente il principio d'induzione, segue che $F_n = a_n$. Ora, la relazione (1) sembra spuntata fuori da un cappello magico. La magia in questo caso corrisponde alla teoria, del tutto generale, delle *equazioni alle differenze*. Il fatto è che la costruzione per ricorrenza dei numeri di Fibonacci corrisponde ad una equazione alle differenze lineare, a coefficienti costanti, omogenea, di ordine due. E questo tipo di equazioni si sanno sempre risolvere con relativa facilità (si veda ad esempio [B.1]). In particolare, la risoluzione di una tale equazione si scrive proprio in termini delle soluzioni di un'equazione algebrica ad essa associata, detta *equazione caratteristica*. E l'equazione caratteristica corrispondente ai numeri di Fibonacci è esattamente la $x^2 - x - 1 = 0$ che definisce la sezione aurea. In questo modo, per qualche dettaglio si consulti ad esempio [B.1, sez. 10.4], si ottiene (1).

Riferimenti bibliografici: [B.1] Acerbi E., Buttazzo G., Primo corso di Analisi Matematica, ed. Pitagora, Bologna, 1997. [B.2] Granieri L., Elementi di Matematica, matematica elementare pre-universitaria, ed. La Dotta, 2013. [B.3] Livio M., La sezione aurea, RCS libri, 2003

[*] Dipart. di Matematica e Applicazioni, Università Federico II di Napoli, Dipart. di Matematica, Politecnico di Bari.
E-mail: luca.granieri@unina.it - granieriluca@libero.it

Sulle funzioni goniometriche e iperboliche

di Gabriele Amadori [**]

Data la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e l'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, e due semirette uscenti dall'origine e con pendenza opposta (nel primo e quarto quadrante), si formano due superfici, delimitate dalle semirette e dalle coniche, di area α. Considerando il punto di intersezione (nel primo quadrante) fra la semiretta e la conica, la sua ascissa e ordinata, funzioni di α, sono rispettivamente chiamate coseno e seno goniometrici (circolari), nel caso della circonferenza, e coseno e seno iperbolici, nel caso dell'iperbole (figure 1 e 2).

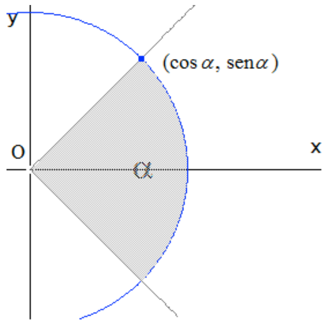


Figura 1

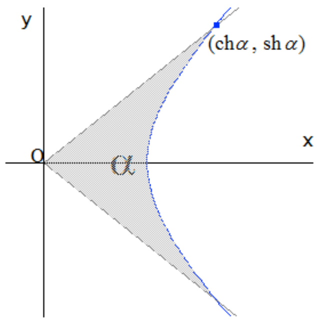


Figura 2

Di seguito le funzioni coseno goniometrico e iperbolico sono indicate genericamente con $\phi(\alpha)$, mentre le funzioni seno con $\gamma(\alpha)$.
Si possono trovare le relazioni intercorrenti fra una delle due funzioni e la derivata dell'altra (supposte entrambe derivabili).
Si considera, allo scopo, un incremento piccolo ε dell'area α, ottenuto dall'aggiunta di due spicchi simmetrici, assimilabili in prima approssimazione, a triangoli dei quali è indicata una altezza δ (vedere figure 3 e 4).

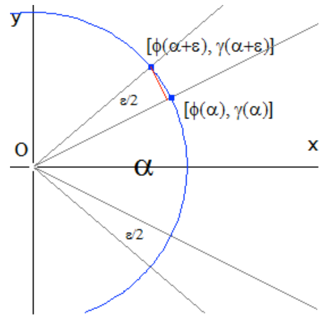


Figura 3

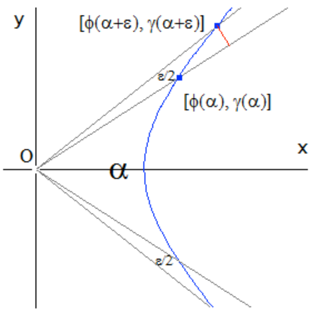


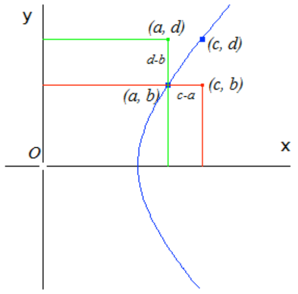
Figura 4

Si può calcolare δ dalla distanza del punto $[\phi(\alpha + \varepsilon), \gamma(\alpha + \varepsilon)]$ alla semiretta sottostante, di equazione $\gamma(\alpha)x - \phi(\alpha)y = 0$.
Si ottiene così:

$$\delta = \frac{|\gamma(\alpha)\cdot\phi(\alpha+\varepsilon)-\gamma(\alpha+\varepsilon)\cdot\phi(\alpha)|}{\sqrt{\gamma^2(\alpha)+\phi^2(\alpha)}} \qquad (1)$$

Al fine di trattare il valore assoluto nella (1), si constata che:

$$\gamma(\alpha)\cdot\phi(\alpha+\varepsilon)-\gamma(\alpha+\varepsilon)\cdot\phi(\alpha)<0\,. \qquad (2)$$



Ciò è immediato nel caso della circonferenza goniometrica (figura 3), meno evidente in quello dell'iperbole. Nella figura a lato sono riprodotti i punti della precedente figura 4, le cui coordinate sono ora indicate, per comodità, con (a, b) e (c, d). La disuguaglianza da verificare è $bc - ad < 0$. Si osserva che $d - b > c - a$, poiché la pendenza dell'iperbole è maggiore di uno, e $a > b$, dato che $a^2 = 1 + b^2$, quindi, moltiplicando i termini corrispondenti, si ottiene: $(d - b)a > (c - a)b$, da cui segue la disuguaglianza (2).
L'area $\varepsilon / 2$ dei due settori circolari e iperbolici, è vicina, come già detto, a quella dei triangoli di altezza δ e base

$$\sqrt{\gamma^2(\alpha)+\phi^2(\alpha)}$$

(che vale 1 per il settore circolare). Si può scrivere quindi, tenuto conto della (1) e della (2):

$$\frac{\varepsilon}{2} \cong \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2(\alpha)+\phi^2(\alpha)}\cdot\frac{\gamma(\alpha+\varepsilon)\cdot\phi(\alpha)-\gamma(\alpha)\cdot\phi(\alpha+\varepsilon)}{\sqrt{\gamma^2(\alpha)+\phi^2(\alpha)}}\,.$$

Deve quindi essere:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma(\alpha+\varepsilon)\cdot\phi(\alpha)-\gamma(\alpha)\cdot\phi(\alpha+\varepsilon)}{\varepsilon}=1$$

Aggiungendo e sottraendo il termine $\gamma(\alpha)\cdot\phi(\alpha)$ a numeratore si ha:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma(\alpha+\varepsilon)-\gamma(\alpha)}{\varepsilon}\cdot\phi(\alpha)+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\alpha)-\phi(\alpha+\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\gamma(\alpha)=$$

$$=\gamma'(\alpha)\cdot\phi(\alpha)-\gamma(\alpha)\cdot\phi'(\alpha)=1 \qquad (3)$$

Differenziando l'identità $\phi^2(\alpha) + \gamma^2(\alpha) = 1$ per la circonferenza e $\phi^2(\alpha) - \gamma^2(\alpha) = 1$ per l'iperbole, si ottiene rispettivamente:

$$\phi(\alpha)\cdot\phi'(\alpha)+\gamma(\alpha)\cdot\gamma'(\alpha)=0 \qquad (4)$$

$$\phi(\alpha)\cdot\phi'(\alpha)-\gamma(\alpha)\cdot\gamma'(\alpha)=0\,. \qquad (5)$$

Dalle (3) e (4) si ha il sistema (si tralascia α)

$$\begin{cases}\gamma'\cdot\phi-\gamma\cdot\phi'=1\\ \phi\cdot\phi'+\gamma\cdot\gamma'=0\end{cases},\quad \text{da cui:}\quad \begin{cases}\phi'=-\gamma\\ \gamma'=\phi\end{cases} \qquad (6)$$

che sono le ordinarie regole di derivazione delle funzioni $\cos(\alpha)$ e $\mathrm{sen}(\alpha)$.
Dalle (3) e (5) si ha

$$\begin{cases}\gamma'\cdot\phi-\gamma\cdot\phi'=1\\ \phi\cdot\phi'-\gamma\cdot\gamma'=0\end{cases},\quad \text{da cui:}\quad \begin{cases}\phi'=\gamma\\ \gamma'=\phi\,.\end{cases} \qquad (7)$$

Dalle (6) e (7) si ricavano le derivate di ogni ordine in termini di $\phi(\alpha)$ e $\gamma(\alpha)$. Si possono quindi sviluppare in serie di Taylor sia $\phi(\alpha)$ che $\gamma(\alpha)$, tenendo conto che $\phi(0) = 1$ e $\gamma(0) = 0$.
[*Segue al numero* 199]

[**] Docente di Matematica presso l'ITI G. Marconi di Rovereto TN, email: *mdrgrl58c24@yahoo.it*

Venerdì 10 aprile, presso l'aula magna del Liceo Scientifico G. Galilei (via San Giacomo 11) di Verona si terrà il convegno sul tema «La matematica che devono sapere gli studenti a conclusione dei loro studi secondari». Il convegno si svolgerà dalle 9.15 alle 18.00 ed è prevista la dispensa ministeriale dall'insegnamento per i docenti partecipanti. Si analizzeranno i vari punti contenuti nella tavola degli apprendimenti preparata dalla Mathesis. Ampio spazio per gli interventi. Contatti: Luciano Corso: tel. 338 6416432 – email: lcorso@iol.it