ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 199 – Pubblicato il 02 – 04 – 2015

Baricentro di una foglia della Lemniscata di Bernoulli

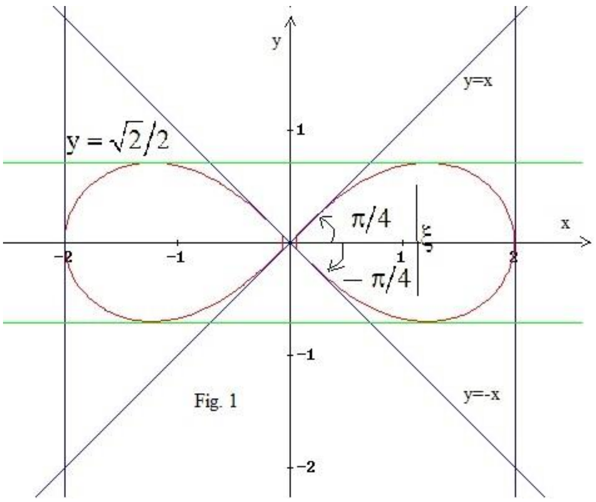
di Nazario Magnarelli [*]

La lemniscata di Bernoulli è la quartica di equazione

C^4: $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$. (1)

Prima parte

La curva taglia l'asse x nei punti $A(a;\,0)$, $B(-a;\,0)$. L'origine $O(0;\,0)$ è un biflecnodo con tangenti principali di equazioni $y = \pm x$, le quali formano con il semiasse positivo delle x due angoli di ampiezza $\varphi = \pm\pi/4$. La curva è compresa tra le rette tangenti $x = \pm a$ e $y = \pm a\sqrt{2}/4$ (si veda la Fig.1, ove si è posto $a = 2$).



Praticamente la curva è rappresentata da due foglie F_1, F_2 aventi il punto O in comune; sia F_1 la foglia che giace nel semipiano $x \geq 0$.

In coordinate polari la foglia F_1 è data dalla funzione

$\rho = a\sqrt{\cos(2\varphi)}$,

che risulta continua e positiva nell'intervallo $T[-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4]$. Si ha quindi un settore polare piano avente T come intervallo base . L'area A della foglia F_1 è data dall'integrale

$$A = \frac{1}{2}\int_T \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} a^2\cdot\cos(2\varphi)\,d\varphi \qquad (2)$$

Ossia

$$A = \int_0^{+\pi/4} a^2\cdot\cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{+\pi/4}\cos(2\varphi)\,d(2\varphi),$$

quindi $A = a^2/2$.

Il baricentro G della foglia F_1 della lemniscata di Bernoulli si trova sull'asse x; esso ha ordinata nulla, mentre l'ascissa ξ è data dalla formula

$$\xi = \frac{1}{area\ A}\int_{F_1} x\,dx\,dy \qquad (3)$$

In coordinate polari si ha $x = \rho\cdot\cos(\varphi)$ e $dx\cdot dy = \rho\cdot d\rho\cdot d\varphi$. Per l'ascissa ξ del baricentro possiamo quindi scrivere:

$$\xi = \frac{1}{a^2/2}\iint_B \rho\cdot\cos(\varphi)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi \ , \qquad (4)$$

con $B[0 \leq \rho \leq a\sqrt{(\cos(2\varphi))}\ ;\ -\pi/4 \leq \varphi \leq +\pi/4]$.

L'integrale diventa

$$\xi = \frac{2}{a^2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\cos(\varphi)\cdot\int_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}}\rho^2\,d\rho\,d\varphi\ ,$$

da cui

$$\xi = \frac{2}{a^2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\cos(\varphi)\cdot\frac{1}{3}\left[\rho^3\right]_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}}\,d\varphi$$

quindi

$$\xi = \frac{2}{a^2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\cos(\varphi)\cdot\frac{1}{3}\cdot a^3\sqrt{\cos^3(2\varphi)}\,d\varphi\ .$$

Con facili passaggi si trova

$$\xi = \frac{4a}{3}\int_0^{+\pi/4}\cos(\varphi)\cdot\sqrt{\cos^3(2\varphi)}\,d\varphi\ . \qquad (5)$$

Risolvere l'integrale che compare nella formula (5) richiede notevole padronanza del calcolo integrale; su di esso si richiama l'interesse del lettore.

Seconda parte

Troviamo ora il baricentro ξ della foglia F_1.

Partiamo dalla sostituzione

$$\cos(2\varphi) = \cos^2(\vartheta)\ , \qquad (6)$$

nella quale $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ e $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$.

Dalla (6) si ottiene

$$1-2\sin^2(\varphi) = 1-\sin^2(\vartheta) \quad , \quad \sin^2(\varphi) = \frac{1}{2}\sin^2(\vartheta)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\vartheta)$$

e quindi, considerando che $\cos(\varphi)\cdot d\varphi = (1/\sqrt{2})\cdot\cos(\vartheta)\cdot d\vartheta$, si ha:

$$\xi = \frac{4a}{3}\int_0^{+\pi/4}\cos(\varphi)\cdot\sqrt{\cos^3(2\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= \frac{4a}{3}\int_0^{+\pi/2}\cos^3(\vartheta)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos(\vartheta)\,d\vartheta$$

cioè

$$\frac{2a\sqrt{2}}{3}\int_0^{+\pi/2}\cos^4(\vartheta)\,d\vartheta\ . \qquad (7)$$

Calcoliamo ora l'integrale indefinito

$$\int\cos^4(\vartheta)\,d\vartheta\ . \qquad (8)$$

Poniamo $\cos^4(\vartheta)$ nella seguente forma:

$$\cos^4(\vartheta) = \left[\cos^2(\vartheta)\right]^2 = \left[\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1+2\cdot\cos(2\vartheta)+\cos^2(2\vartheta)}{4}\ .$$

Per opportunità possiamo scrivere:

$$= \frac{2+4\cdot\cos(2\vartheta)+2\cos^2(2\vartheta)}{8}\ .$$

Poiché $2\cdot\cos^2(2\vartheta) = 1+\cos(4\vartheta)$, ne segue

$$\cos^4(\vartheta) = \frac{3+4\cdot\cos(2\vartheta)+\cos(4\vartheta)}{8}\ . \qquad (9)$$

L'integrale (8) diventa.

$$\int\cos^4(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{3}{8}\int d\vartheta + \frac{1}{2}\int\cos(2\vartheta)\,d\vartheta + \frac{1}{8}\int\cos(4\vartheta)\,d\vartheta\ ,$$

che ci dà

$$\int \cos^4(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{3}{8}\vartheta + \frac{1}{4}\sin(2\vartheta) + \frac{1}{32}\sin(4\vartheta) + \text{costante} . \qquad (10)$$

Ritornando ora a (7) si ottiene facilmente

$$\xi = \frac{a\sqrt{2}\cdot\pi}{8} \qquad (11)$$

che è la formula del baricentro della foglia F_1. Essa ci permette di trovare il volume V_S del solido che si ottiene facendo ruotare la lemniscata di Bernoulli attorno all'asse y; per il teorema di Guldino si ha

$$V_S = 2\pi\xi\cdot(area\ foglia) , \ \rightarrow \quad V_S = 2\pi\cdot\frac{a\sqrt{2}\cdot\pi}{8}\cdot\frac{a^2}{2} ,$$

quindi

$$V_S = \frac{a^3\sqrt{2}\cdot\pi^2}{8} . \qquad (12)$$

Questo risultato è esattamente uguale a quello trovato per altra via nel tema di Concorso a Cattedre di Matematica e Fisica, Classe VII, anno 1967 (vedi Rivista "Archimede" – dicembre, anno 1971).

[*] Socio Mathesis di Latina; email: nazario.magnarelli@libero.it

Sulle funzioni goniometriche e iperboliche

di Gabriele Amadori [**]

[*Segue dal numero* 198]

In particolare, nel caso dell'iperbole:

$$\varphi(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\cdot\alpha^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \qquad (8)$$

$$\gamma(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\gamma^{(k)}(0)}{k!}\cdot\alpha^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} . \qquad (9)$$

Ricordando gli sviluppi

$$e^{\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \qquad \text{e} \qquad e^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^k}{k!} ,$$

dal confronto con le (8) e (9), si ottengono le formule

$$\phi(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \gamma(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} . \qquad (10)$$

Allo stesso risultato si giunge più rapidamente risolvendo i due seguenti problemi di Cauchy che si possono ricavare dalla (7):

$$\begin{cases} \phi''(\alpha) = \phi(\alpha) \\ \phi(0) = 1 \\ \phi'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \gamma''(\alpha) = \gamma(\alpha) \\ \gamma(0) = 0 \\ \gamma'(0) = 1 \end{cases} .$$

Le (10) si possono evidentemente ottenere anche per integrazione. Dalla figura (2) si vede che, ponendo $\mathrm{ch}(\alpha) = x$ e $\mathrm{sh}(\alpha) = y$:

$$\alpha = x\sqrt{x^2-1} - 2\int_1^x \sqrt{u^2-1}\cdot du .$$

L'integrale si calcola con la sostituzione $\sqrt{(u^2-1)} = t - u$

pervenendo così a $\alpha = \ln(\sqrt{(x^2-1)} + x)$, da cui, ricavando x, si ottiene la prima delle (10). La seconda segue da $y = \sqrt{(x^2-1)}$.

[**] Docente di Matematica presso l'ITI G. Marconi di Rovereto TN, email: *mdrgrl58c24@yahoo.it*

LEGAME FRA FUNZIONI GONIOMETRICHE E IPERBOLICHE IN $\mathbb{C}$ $\mathrm{sh}\, i\theta = i\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\mathrm{ch}\, i\theta = \cos\theta$	
FORMULE GONIOMETRICHE	FORMULE IPERBOLICHE
$\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1$	$\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$
$\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$	$\mathrm{sh}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta \pm \mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$ $\mathrm{ch}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta \pm \mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$
$\mathrm{sen}\,2\alpha = 2\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$	$\mathrm{sh}\,2\alpha = 2\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha$ $\mathrm{ch}\,2\alpha = \mathrm{ch}^2\alpha + \mathrm{sh}^2\alpha$
$\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$	$\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\alpha - 1}{2}}$ $\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\alpha + 1}{2}}$
$\mathrm{sen}\,p + \mathrm{sen}\,q = 2\mathrm{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\mathrm{sen}\,p - \mathrm{sen}\,q = 2\mathrm{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = 2\mathrm{sen}\frac{p+q}{2}\mathrm{sen}\frac{p-q}{2}$	$\mathrm{sh}\,p + \mathrm{sh}\,q = 2\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$ $\mathrm{sh}\,p - \mathrm{sh}\,q = 2\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}$ $\mathrm{ch}\,p + \mathrm{ch}\,q = 2\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$ $\mathrm{ch}\,p - \mathrm{ch}\,q = 2\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}$
$\cos\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}[\mathrm{sen}(\alpha+\beta) - \mathrm{sen}(\alpha-\beta)]$ $\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$	$\mathrm{sh}\,\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta = \frac{1}{2}[\mathrm{sh}(\alpha+\beta) - \mathrm{sh}(\alpha-\beta)]$ $\mathrm{sh}\,\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(\alpha+\beta) - \mathrm{ch}(\alpha-\beta)]$ $\mathrm{ch}\,\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(\alpha+\beta) + \mathrm{ch}(\alpha-\beta)]$

$$s_n = n^2 + n + 41$$

con n naturale: $0 \le n \le 39$, fornisce 40 numeri primi. Chi se ne accorse? Il solito geniale Leonhard Euler. A cosa serve? A niente, credo. Come i minuetti di Mozart: non servono a niente, salvo che son belli. (Tratto da David Wells, Numeri memorabili, dizionario dei numeri matematicamente curiosi, Zanichelli, Bologna, 1991)

La tavola degli apprendimenti

Quale matematica si deve insegnare agli studenti perché alla fine del loro corso di studi liceali abbiano una buona preparazione, ancorché essenziale, che possa permettere loro di proseguire gli studi in corsi di laurea scientifici o, semplicemente, di possedere una buona formazione culturale?