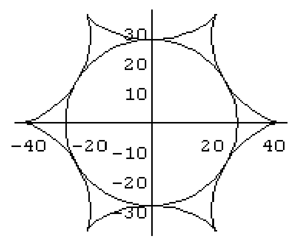
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail; lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 20 – agosto 1999



La nozione di insieme

di Ruggero Ferro

Spesso consideriamo una classe come una cosa singola. Ad esempio, siamo abituati a considerare una squadra sportiva come una cosa singola e quando diciamo che la squadra ha vinto evidentemente ci riferiamo a tutta la squadra come un solo ente e non ai giocatori suoi elementi: qualche giocatore può aver giocato molto male, ma ugualmente la squadra ha vinto. Una volta che una classe è considerata come cosa singola, essa può essere anche utilizzata come elemento di un'altra classe o come soggetto di affermazioni. Per rimanere nell'esempio precedente possiamo considerare un torneo tra squadre, cioè la classe di tutte le squadre che partecipano ad una certa competizione. Si noti che gli elementi della classe torneo sono le squadre che sono a loro volta classi i cui elementi sono giocatori della squadra.

La classi che possono e che vengono considerate come cosa singola, come elemento, sono chiamate <u>insiemi</u>. Si noti che solo le classi che possono essere considerate come cose singole, come elementi, cioè le classi che sono insiemi, possono appartenere ad altre classi perché solo gli elementi possono appartenere ad una classe in base alla idea di classe presentata fin dall'inizio.

Questa distinzione tra classi ed insiemi che abbiamo sottolineato è importante perché ci sono classi che non possono essere considerate come cose singole, come elementi, sicché non possono appartenere ad una classe (proprio perché non sono elementi). Chiameremo <u>classi proprie</u> tali classi che non sono elementi.

Ecco un esempio di una classe che non può essere considerata come una cosa singola, come un insieme, perché altrimenti la teoria degli insiemi che si sta cercando di proporre conterrebbe delle contraddizioni. Consideriamo la classe universale a cui appartiene ogni elemento, cioè {x: x è un elemento}. La classe universale non è una cosa singola, un elemento, perché se lo fosse apparterrebbe a se stessa (tutti gli elementi appartengono alla classe universale!) ; ma, dalla proprietà di fondatezza delle classi, segue che nessuna classe che è un elemento (cioè nessun insieme) può appartenere a se stessa, cioè per ogni insieme X si ha che $X \notin X$. Infatti, se non fosse così, ci sarebbe almeno un insieme C che apparterrebbe a se stesso, $C \in C$, ma allora non si potrebbero conoscere tutti gli elementi di quella classe C prima della classe stessa, perché un elemento, C, è proprio la stessa classe, e ciò contraddirebbe la fondatezza. Si noti che per le classi proprie il problema dell'appartenenza a se stesse non si può neppure proporre, perché, non essendo elementi, non ha senso domandarsi se appartengono a qualcosa.

Si può mostrare che ci sono classi che non possono essere considerate come una cosa singola anche senza far ricorso alla fondatezza. Ad esempio, si consideri la classe di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi, cioè la classe $\mathbf{R}=\{X: X \notin X\}$ (per la fondatezza sappiamo che questa è proprio la classe universale, ma ora possiamo procedere anche senza sapere che è la classe universale). <u>Se questa classe fosse un insieme</u>, ci possiamo domandare se $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ o se $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$. Vediamo che non può essere vera né un'ipotesi, né l'altra. Infatti se **R** appartenesse a **R** allora sarebbe un elemento di **R** e godrebbe della proprietà che caratterizza gli elementi di **R**, cioè non apparterrebbe a se stesso, cioè se $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ allora $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$, impossibile in questo caso. Supponiamo ora che **R** non appartenga a **R**, cioè $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$; ma questa è proprio la caratteristica degli elementi che appartengono ad **R**, sicché $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$. Così abbiamo visto che se $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$ allora $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$, impossibile anche in questo caso. Avendo raggiunto una posizione inaccettabile in entrambi i casi, dal momento che questi esauriscono le possibilità, dobbiamo concludere che **R** non può essere un insieme, perché questa era la condizione per poter arrivare alla contraddizione (Abbiamo individuato con **R** questa classe perché fu inizialmente utilizzata da Russell nel suo famoso paradosso tendente a dimostrare appunto che non si può assumere che ogni classe sia un insieme).

Secondo il computer Bonino e Forza Italia a pari potere

di Gianfranco Gambarelli **

Secondo i calcoli effettuati nell'Università degli studi di Bergamo sulle ultime elezioni europee, la lista Bonino ha lo stesso potere coalizionale di Forza Italia.

Per comprendere il concetto di "potere coalizionale", consideriamo un Paese ove vi siano tre soli partiti politici, *A*, *B* e *C*, con la seguente ripartizione di seggi: 40% ad *A* e 30% a *B* e *C*. È facile constatare che, se non vi sono particolari propensioni od avversioni per certe alleanze, tutti e tre sono sullo stesso piano agli effetti delle possibili coalizioni di maggioranza semplice. Possiamo quindi assegnare un "potere coalizionale" paritetico, cioè del $33,\bar{3}$% a ciascuno. La stessa situazione si presenterebbe se *A* e *B* avessero il 49% dei seggi ciascuno e *C* il 2%: quest'ultimo partito avrebbe infatti, pur con un potere nominale molto basso, un potere reale uguale a quello degli altri. Se invece *A* avesse da solo il 51% dei seggi, il suo potere sarebbe del 100% (cioè 1). Che dire se la ripartizione dei seggi è 50% per *A*, 30% per *B* e 20% per *C* ? Qui *A* non possiede da solo la maggioranza; d'altra parte ciascuno degli altri due partiti ha bisogno di coalizzarsi con *A*, in quanto l'unione fra *B* e *C* è minoritaria. È intanto facile intuire che questi ultimi, pur avendo diverse quantità di seggi, sono in ugual posizione di potere; è anche presumibile che *A* abbia un potere maggiore, data la sua posizione prioritaria; ma quale ripartizione potremo prevedere?

Un metodo per valutarla si basa sul concetto di "crucialità". Si dice che un giocatore è cruciale per una coalizione, se essa è maggioritaria con lui e minoritaria senza di lui. Nel caso dell'ultimo esempio, *A* è cruciale per tre coalizioni (*AB*, *AC* e *ABC*), mentre *B* è cruciale solo per una (*AB*), analogamente per *C* (cruciale per *AC*). Ripartendo il potere in proporzione di tali crucialità, si ottiene 3/5 per *A* e 1/5 per *B* e *C*.

Ora che abbiamo capito la logica del modello, passiamo ad esaminare la sua applicazione alle recenti elezioni europee. Come si vede dalla tabella, la lista Bonino ha un potere coalizionale del 23%: lo stesso di Forza Italia. Lega e PRC hanno un potere superiore alla loro percentuale di voti e il Centrosinistra un potere leggermente inferiore. Una riflessione importante riguarda poi le affinità fra i vari gruppi. Nei calcoli non si è infatti tenuto conto che alcune coalizioni, teoricamente possibili, sono in realtà molto improbabili (in particolare, quella fra centrodestra e centrosinistra). In genere si riscontra che in tali casi i partiti più graditi aumentano il loro potere: si può quindi intuire che, in questi termini, la lista Bonino può addirittura superare Forza Italia.

	Voti	Potere
	%	%
Centrosinistra	41.2	38.3
Centrodestra	38.1	23.0
Lista Bonino	8.5	23.0
Lega Nord	4.5	7.7
PRC	4.3	7.7
Altri (‘)	3.4	0.4
Totali	100.0	100.0

Elezioni Europee del 13 giugno 1999: poteri coalizionali in Italia
(*) disaggregati in dieci gruppi, ciascuno con percentuale di voti non superiore allo 0.4%

Il calcolo dei poteri nell'ambito del nuovo Parlamento Europeo è meno significativo allo stato attuale, in quanto molti parlamentari non si sono ancora schierati (vedi ultime due righe della relativa tabella) ed è inoltre più difficile tener conto di propensioni e avversioni. Si può quantomeno osservare che, allo stato attuale, il PPE mantiene un potere molto vicino alla sua percentuale di seggi (35.8%), mentre il PSE dimezza il suo potere rispetto ai suoi seggi (28.8%).

	Seggi	Potere (%)
PPE	224	35.3
PSE	180	14.5
LDR	43	10.0
V	38	8.5
IUE	35	7.9
EN	21	5.0
UPE	17	3.5
ARE	14	3.2
Non iscr.	18	
Altri (‘)	36	12.1
Totali	626	100.0

Elezioni Europee del 13 giugno 1999: poteri coalizionali in Europa.
(*) Nel calcolo, i "non iscritti" e gli "altri" sono stati disaggregati in otto gruppi con meno di otto parlamentari ciascuno.

Concludo con qualche nota tecnica. Il modello qui utilizzato è quello di Banzhaf-Coleman; ve ne sono altri, ancora basati sulle crucialità, che portano in questi casi a risultati molto simili (ad esempio il più noto, quello di Shapley-Shubik, fornisce nel caso italiano dei poteri che non si discostano da quelli qui riportati, di più di un punto percentuale). I principali studi sulle variazioni dei poteri in relazione a propensioni ed avversioni sono opera di Guillermo Owen della Naval Postgraduate School di Monterey. Owen collabora da anni con l'Università di Bergamo anche per applicare tali risultati alle scalate al controllo azionario; in particolare una nostra recente pubblicazione riguarda le scalate alle "holding".

Per chi desiderasse approfondire questi argomenti, segnalo il mio recente volumetto *Giochi competitivi e cooperativi*, edizioni CEDAM, Padova.

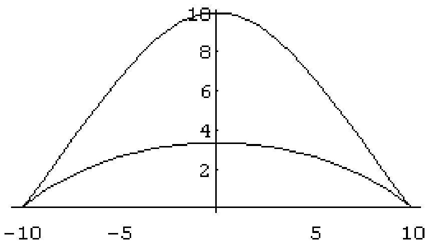
*** Ordinario di Matematica Generale nell'Università degli studi di Bergamo*

Sulla Creazione

(sul bisogno dell’uomo di investigare lo stato del mondo)

«When the Lord created the world and people to live in it – an enterprise which, according to modern science, took a very long time – I could well imagine that He reasoned wich Himself as follows: “ If I make everything predictable, these human beings, whom I have endowed with pretty good brains, will undoubtedly learn to predict everything, and they will thereupon have no motive to do anything at all, because they will recognize that the future is totally determined and cannot be influenced by any human action. On the other hand, if I make everything unpredictable, they will gradually discover that there is no rational basis for any decision whatsoever and, as in the first case, they will thereupon have no motive to do anything at all. Neither scheme would make sense. I must therefore create a mixture of the two. Let some things be predictable and let others be impredictable. They will then, amongst many other things, have the very important task of finding out which is which”.» [B.1]

Bibliografia: [B.1] E. F. Schumacher, Small is Beautiful, tratto da Analisi numerica, V. Comincioli, ed. McGraw-Hill Italia, Milano, 1990



Il bicorno di Charlotte Angas Scott

Le sue coordinate parametriche sono:

$$\begin{cases} x = 10 \cdot \cos(t) \\ y = 10 \cdot \left[\mathrm{sen}^2(t)\right] / \left[2 + \mathrm{sen}(t)\right] \end{cases}$$

ove {t: 0,2·π}.

Bibliografia: Luciano Cresci, «Le curve celebri», Muzzio ed., Padova, 1998

Il caso e la vita sulla Terra

di Luciano Corso

Supponiamo di avere una scatola con 10^9 palline al suo interno, di cui una sola sia bianca. La probabilità di pescarla in una sola estrazione è – come insegna il calcolo delle probabilità – 10^{-9}: L’evento, quindi, può considerarsi assai raro. Supponiamo di aver ora la possibilità di poter eseguire un numero molto grande di prove, con reinserimento della pallina estratta dopo ogni prova. La probabilità che esca almeno una volta quella pallina, in tal caso, aumenta considerevolmente, tanto che possiamo pensare che se potessimo provare *ad libitum* prima o poi quell’evento si verificherebbe con quasi certezza: per esempio, la probabilità che si verifichi almeno una volta in 1.000.000.000 di estrazioni è di $P(x \geq 1 \mid \lambda = n \cdot p = 1) = 1 - \mathrm{Exp}[-1] \cong 0,632121$ (ho considerato una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità di Poisson). Se la possibilità che si sia potuta originare la vita sulla Terra per caso fosse legata a questo esperimento (la pallina bianca corrisponderebbe alla combinazione vincente di elementi naturali che si sarebbe dovuta verificare per caso durante l’evoluzione), potremmo dire che è molto improbabile che si sia verificata con una sola prova la vita. Ma se diamo al caso la possibilità di provare senza limite e ammettiamo che la combinazione vincente una volta verificatasi abbia innescato i meccanismi evolutivi che noi conosciamo, allora la possibilità che quanto abbiamo sperimentato sia dovuto al caso risulterebbe molto alta. È quindi tutto questione di tempo: se la natura ha avuto tempo sufficiente di provare, la possibilità che la vita sia dovuta al caso è alta, altrimenti no. Qui sulla Terra si sono verificati numerosissimi eventi, coordinati più o meno sistematicamente, che hanno dato origine alla vita. Progetto o caso? Non è ancora possibile dare una risposta a questo quesito, ma pare che il tempo per provare a costruire la vita dal mondo inanimato, per la materia con i suoi moti caotici e vorticosi, sia stato relativamente ristretto. Voi, che pensate?