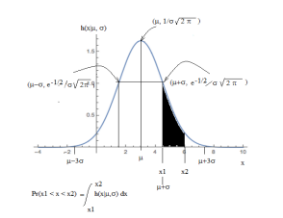
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 200 – Pubblicato il 02 – 05 – 2015



Teorema centrale limite di J.W. Lindeberg-Paul Lévy

di Luciano Corso [*]

Il teorema centrale limite è uno dei teoremi più importanti della matematica applicata perché costituisce il fondamento della teoria dei grandi campioni in statistica. La sua portata equivale al teorema di Pitagora in Geometria o alla legge di gravitazione universale in Fisica, eppure è meno noto. Esso fa parte di una serie di teoremi che normalmente prende il nome di teoremi centrali limite. Il teorema è stato dimostrato in modo indipendente da Lindeberg e Lévy.

Consideriamo una successione di v.a. $\langle X_n \rangle$ indipendenti e identicamente distribuite. Sia $M(X_h) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_h) = \sigma^2$ per ogni h e tale che $\sigma^2 < +\infty$. Costruiamo la successione $\langle S_n \rangle$ dove

$$S_n = \sum_{h=1}^{n} X_h\,,\ \forall n. \tag{1}$$

Questa successione è la successione delle somme parziali: $S_1 = X_1$, $S_2 = (X_1+X_2)$, …

Standardizziamo tutti i termini di questa successione:

$$Z_n = \frac{S_n - M(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{\sum_{h=1}^{n} X_h - n\cdot\mu}{n\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_{h=1}^{n}(X_h-\mu)}{\sqrt{n}\cdot\sigma}. \tag{2}$$

Sappiamo che $M(Z_n) = 0$ e $Var(Z_n) = 1$. Vogliamo ora dimostrare che la successione $\langle Z_n \rangle$ converge in legge (in distribuzione) verso $N_Z(0, 1)$; la convergenza in legge corrisponde alla convergenza della successione $\langle F_n \rangle$ delle distribuzioni dei termini della successione $\langle S_n \rangle$ a una distribuzione limite F al tendere di n all'infinito.

Per dimostrare ciò utilizzeremo la funzione caratteristica dei momenti di Z_n e il teorema di Lévy-Cramér che stabilisce una stretta corrispondenza (biunivoca e continua) tra funzioni di distribuzione e loro funzioni caratteristiche. Osserviamo che non è stata fatta alcuna ipotesi circa la distribuzione di probabilità associata ai termini della sequenza $\langle X_n \rangle$.

Partiamo ponendo, per semplicità di scrittura, $Y_h = X_h - \mu$ e ricordiamo che $M(Y_h) = 0$ e $M(X_h - \mu)^2 = \sigma^2$. La (2) diventa:

$$Z_n = \frac{\sum_{h=1}^{n} Y_h}{\sqrt{n}\cdot\sigma}. \tag{3}$$

Dalla funzione caratteristica dei momenti di Z_n si ha:

$$M\left(e^{itZ_n}\right) = M\left(e^{it\frac{\sum_{h=1}^{n}Y_h}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right) = \tag{4}$$

$$= M\left[\left(e^{it\frac{Y_1}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right)\cdot\left(e^{it\frac{Y_2}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(e^{it\frac{Y_n}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right)\right] =$$

$$= M\left(e^{it\frac{Y_1}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right)\cdot M\left(e^{it\frac{Y_2}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right)\cdot\ldots\cdot M\left(e^{it\frac{Y_n}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right). \tag{5}$$

(5) è dovuto al fatto che i fattori $\exp[itY_h/\sqrt{n}\,\sigma]$, $\forall\, h$, sono statisticamente indipendenti. Tenendo conto che a priori, cioè prima che si verifichi il dato sperimentale, le variabili $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = Y$ sono v.a. che si muovono sullo stesso campo e quindi sono identiche, (5) diventa:

$$\left[M\left(e^{i\cdot t\cdot\frac{Y}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right)\right]^n. \tag{6}$$

Sviluppiamo in serie di Taylor

$$M\left(e^{i\cdot t\cdot Z_n}\right) = \left[M\left(e^{i\cdot t\cdot\frac{Y}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right)\right]^n = \left[M\left(1+\frac{itY}{\sqrt{n}\cdot\sigma}+\frac{i^2t^2Y^2}{2\cdot n\cdot\sigma^2}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\right]^n$$

$$= \left(1+\frac{it\,M(Y)}{\sqrt{n}\cdot\sigma}-\frac{t^2M\left(Y^2\right)}{2n\cdot\sigma^2}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = \tag{7}$$

$$= \left(1+0-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \tag{8}$$

Poiché, come abbiamo visto sopra, $M(Y) = 0$ e $M(Y^2) = \sigma^2$. Il termine $o(t^2/n)$ è un infinitesimo di ordine superiore nello sviluppo. Ora poniamo

$$u = -\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right) \tag{9}$$

che per ogni t, se $n\to+\infty$ è $|u| < 1$. Per cui si può avere:

$$\ln\left[M\left(e^{itZ_n}\right)\right] = n\cdot\ln(1+u).$$

Se si sviluppa in serie di Taylor si ottiene:

$$\ln\left[M\left(e^{itZ_n}\right)\right] = n\cdot\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}+\ldots\right)$$

e tenuto conto della (9) si ottiene:

$$\ln\left[M\left(e^{itZ_n}\right)\right] = n\cdot\left(-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^2+\ldots\right) =$$

$$= -\frac{t^2}{2}+n\left[o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]+\ldots$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} M\left(e^{itZ_n}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{10}$$

che è la funzione caratteristica di una $N_Z(0, 1)$. Perciò si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\Phi(Z_n) = \Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,. \tag{11}$$

Questo è il teorema.

Vorremmo qui esporre la sua importanza in statistica e con ciò dimostrare che la distribuzione di probabilità Normale è qualcosa di più di una funzione con proprietà probabilistiche. Ho avuto occasione di constatare che l'idea dominante in chi espone didatticamente le proprietà della funzione di densità di probabilità Normale, manchi l'attenzione di evidenziare l'importanza scientifica di questa funzione. Consideriamo una popolazione di dati X e una sua funzione di ripartizione (o distribuzione) delle probabilità $H_X(x)$ ignota. Estraiamo un campione di n unità dalla popolazione e cominciamo a calcolare tutti i momenti campionari di ordine r dall'origine:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^r \,, \forall r \in \mathbf{N} \,. \qquad (12)$$

Otteniamo delle stime dei corrispondenti momenti μ_r della popolazione da cui i campioni provengono. Come si comportano queste stime dal punto di vista della loro distribuzione? Possiamo dire poco, in generale, su questo loro comportamento, ma se il campione è grande (il teorema è dimostrato per $n \to +\infty$, ma la congettura è valida anche per n finito purché grande) i momenti campionari m_r di X danno stime che sono distribuite tendenzialmente come una normale con media uguale al momento corrispondente della popolazione da cui i campioni provengono (cioè: $M(m_r) = \mu_r$) e varianza pari a $(\mu_{2r} - \mu_r^2)/n$. È un risultato straordinario che permette di fare inferenze statistiche anche là dove non sappiamo alcunché della distribuzione di probabilità associata alla popolazione di origine del campione.

Riferimenti bibliografici: [B.1] Landenna G., Marasini D., Ferrari P., *Probabilità e variabili aleatorie*, il Mulino, Bologna, 1997. [B.2] Gnedenko B. V., *Teoria della Probabilità*, Editori Riuniti, Mosca e Roma, 1979. [B.3] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, John Wiley & Sons Inc., New York, 1966. [B.3] De Finetti B., *Teoria delle Probabilità*, Vol. II, G. Einaudi editore, Torino, 1970. [B.4] Daboni L., *Calcolo delle probabilità ed elementi di Statistica*, III edizione, UTET, Torino, 1980.

[*] Consigliere nazionale Mathesis e direttore di questa rivista

… Terribilis est locus iste …

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 196] Così va il mondo e le cose che contiene. I sogni durano al massimo una notte e possono sembrare lunghi una vita. La Terra è piena di sognatori che si ingannano e vorrebbero ingannare gli altri; è piena di uomini le cui vite sono sogni estremi. Ogni sogno, come ogni vita, può essere banale, interessante, causticamente importante. L'umanità è imbevuta di presunzioni che nascono da sogni. I sogni danno l'idea di un'altra vita, di una ipotetica immortalità. Qui, in questo spazio finito, discreto, sconnesso dove mi trovo non può esserci presunzione. Ogni costruzione fantastica, in questo mondo, si può ricondurre a pochi punti. I segni - nomi? - li ho dati io ai punti, malgrado che io abbia sempre odiato i segnali, le indicazioni, soprattutto di chi mi voleva dare una dritta nella vita. Ho cercato in me le capacità di sapermi orientare. Ora, sia quando vado in montagna, sia nell'ingarbugliato mondo che mi circonda, cerco ancora di uscire dai sentieri segnati, dalle "rette" vie, e di seguire percorsi personali, anche se accidentati e fratti. Però, questa scelta, impone equilibrio, resistenza, chiarezza cartesiana nelle decisioni, assenza di vertigini per non cadere e tanta razionalità. Ma qui, che fare? Quali contorti pensieri mi possono portare a costruire mondi vivibili in questo spazio di 5 punti? Mi sono perso e il mio sogno è un labirinto che priva di ragione. Senza ragione, non si può comprendere la vita, né si può capire la poesia, la musica, la scienza. È la ragione che organizza i pensieri, dà corpo al conoscere, alimenta il bisogno di classificare tutto per genere e specie, ordina anche le emozioni, anche il fantastico mondo dei sogni che portiamo dentro. Senza ragione, meravigliarsi è una ingenua proiezione della stupidità sui sentimenti. Mi fisso ad un punto e il tutto che mi circonda è proprio poca cosa. Poca cosa è la vita, in fondo, poca cosa è la straordinarietà del tutto e il suo potere. Credo che sia molto bello che lo straordinario abbia potere, ma senza controllo della ragione vivere solo di straordinarietà diventa una pericolosa induzione che a poco a poco porterebbe ognuno a credersi un dio. Non voglio cadere in questo errore. Mi aggrappo con ogni forza alla ragione. Così la ragione modella e seleziona la normalità che rappresenta infine ciò che i più devono avere per non incorrere in pretese che ci porterebbero verso la stupidità.

Non ci sono punti fissi nella vita e in un sistema debolmente stabile, dove il mutare costituisce un'evidenza, i ricordi diventano il vincolo in predominante ascesa al variare del tempo; è facile dimenticare (per debolezza dei nostri neuroni), ma non si vuole abbandonare (per scelta razionale) il ricordo. Rimpiango il mondo da cui provengo.

Appare di lontano una navicella spaziale che si avvicina alla mia rapidamente. Mi arriva un messaggio e in veloce successione dall'oblò appare un volto di donna che sorride. Allora non solo qualcuno mi segue da lontano, ma è possibile venirmi a trovare: le coordinate astronomiche del mio punto nave sono note a qualcuno. Forse anche lei è qui per caso, per un sogno. Eppure sono in un luogo sufficientemente distante, adeguatamente isolato da poter pensare che nulla esista intorno e nessuno possa arrivare qui. [*Segue al numero* 203]

«Breve storia della logica antica»

di Ruggero Ferro [**]

La seconda edizione del libro *Breve storia della logica antica* di Silvio Maracchia (ed. Simmetrie, Roma, 2014) è un testo che non perde di attualità e si legge con molto interesse.

Anche se l'autore definisce il suo percorso breve, di fatto rende conto dei vari movimenti che si sono avuti nell'antichità e che hanno coinvolto la logica, accompagnando la descrizione con una corposa antologia per ritrovare (ove possibile) le fonti di quanto affermato.

Certo non è un'analisi critica dello sviluppo, delle affermazioni e delle posizioni che si sono avute sulla logica alla luce dei più recenti risultati acquisiti da questa disciplina. Se così avesse fatto, il lavoro non sarebbe stato breve, ma molto voluminoso, ostico e pesante. Ma anche chi vuole osservare criticamente lo sviluppo della logica, cominciando da quella antica, ha bisogno di sapere di cosa si parla (e anche delle discussioni tra le varie scuole dell'antichità con le relative reciproche critiche e i nuovi apporti), e il libro di Maracchia fornisce il dovuto inquadramento, anche dei diversi punti di vista, e ampi riferimenti alle fonti. È vero che nei tempi che considera l'autore (da prima di Platone fino a tutto il Medioevo) non si distingueva tra l'argomento in esame e sua descrizione, sicché lo studio di come si svolgono le operazioni mentali (di come si ragiona) viene svolto identificando ciò con le espressioni linguistiche che lo manifestano, senza neppure essere sfiorati dal dubbio che l'espressione ha bisogno di una interpretazione che non è necessariamente univoca. Ma questa era la situazione di quei tempi e per farcela rivivere, giustamente l'autore non considera queste critiche posteriori.

Se uno poi è interessato a capire di cosa tratta questa disciplina che è chiamata logica, non può fermarsi ai tempi antichi, ma comunque deve considerarli per rendersi conto da dove e come sono nati i problemi che hanno portato allo sviluppo attuale.

La ricerca della certezza, eventualmente attraverso l'individuazione di principi generalissimi da cui derivare la conoscenza giustificata di ogni particolare aspetto del reale, è da sempre un'aspirazione umana, motivata almeno dal voler prevedere correttamente l'esito delle proprie azioni prima di compierle. Da sempre la presunta certezza della matematica (che oggi si sa essere basata su gratuite ipotesi che si ritengono opportune) ha sollecitato la cultura, e i filosofi in particolare, a dare un fondamento certo alla conoscenza, e la logica è stata vista da molti come uno strumento centrale per il conseguimento di tale obiettivo. Anche se questo mito dovrebbe essere oggi tramontato (ma lo è?) rimane essenziale essere informati su come si è evoluta la storia della logica per capire quali erano le aspirazioni cui rispondeva e come è riuscita ad acquisire un così largo spazio nella cultura, nelle discussioni filosofiche e nella passata formazione delle persone colte.

In conclusione il libro di Maracchia è una lettura da consigliare a ogni persona che si vuole interessare dello sviluppo della cultura in cui siamo immersi.

[**] Docente presso l'Università degli Studi di Verona;
e-mail: ruggero.ferro@univr.it