ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 202 – Pubblicato il 01 – 07 – 2015

Spunti sul *Teorema di Pitagora* - 2 [11]

di Gabriele Lucchini [12]

Apro questa seconda parte con la segnalazione di una mia nuova sconfitta nella guerra che, da "fossile digitale" (tra nativi, immigrati e rifiutanti), combatto con WORD: mi è sparita – come a volte mi capita anche per parti del testo – una nota a piè di pagina e non me ne sono accorto neppure nella lettura delle bozze: la nota riguardava l'inizio della generalizzazione a triangoli non rettangoli con un rimando alle proposizioni II, 12 e II, 13 degli *Elementi* di Euclide [13].

*   *   *

Il quarto quesito è ripreso da un questionario [14], che ho utilizzato per *Matematiche complementari* alla Università degli Studi di Milano [15]:

Dell'affermazione (*contenuta in un libro per insegnanti*) «*l'equazione* $x^2 + y^2 = z^2$*, le cui soluzioni intere sono* $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$ ($m, n \in Z$)», *con* x, y, z *interi non nulli, dico che:*

a) è vera, perché ... ;
b) è falsa, perché ... ;
c) non so se è vera o se è falsa;
d) altro. [16]

Nell'invitare a scegliere una risposta, mi pare interessante proporre i dati, elaborati da Barbara Moro in un quadro più vasto [17], su 108 schede raccolte in vari anni:

65 *a*,   25 *b* [18],   14 *c*,   4 *nessuna risposta*.

Invito a cercare una motivazione della risposta *b* prima di leggere la mia e a segnalarmi alternative.

Un criterio abbastanza semplice è quello di considerare la terna $\langle 9, 12, 15\rangle$, ottenuta triplicando i numeri della ben nota terna $\langle 3, 4, 5\rangle$ [19], che porta a cercare m, n tali che sia

$$2mn = 12$$
$$m^2 - n^2 = 9$$
$$m^2 + n^2 = 15:$$

questo sistema non ha soluzioni intere dovendo essere

$$2m^2 = 24$$ [20]

e, quindi, $\langle 9, 12, 15\rangle$ non è ottenibile con le formule citate.

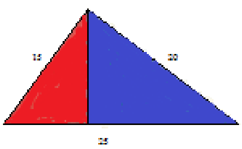

Fig. 8

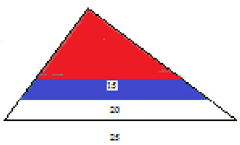

Fig. 9

Per collegarci al Teorema di Pitagora, passiamo da **Z** a **N** conservando la condizione di x, y, z non nulli, cioè a quelle che abitualmente vengono chiamate *terne pitagoriche*: come è ben noto, ma spesso "dimenticato" o "omesso" come nel testo utilizzato per il quesito, la questione sta nella distinzione tra le terne *primitive* (intese come quelle che hanno x, y, z privi di divisori comuni) e *tutte* le terne: per avere tutte le terne pitagoriche occorre aggiungere un fattore moltiplicativo k, con $k \neq 0$ e $k \in \mathbf{N}$, limitandosi a $m > n$, con $m, n \in \mathbf{N}$:

$$x = 2\,k\,m\,n,$$
$$y = k\,(m^2 - n^2),$$
$$z = k\,(m^2 + n^2).$$

Si noti che le formule senza k generano anche terne non primitive, come mostra la terna $\langle 6, 8, 10\rangle$ (cfr. nota [20]); perché le terne siano primitive occorre che m e n siano *coprimi* e che uno di loro sia pari e l'altro dispari.

Chiaramente, la rilevanza di dimenticanze od omissioni (ma pare lecito ritenere che in qualche caso si tratti di "errori" indotti da altri testi [21]) può essere variamente valutata: mi pare che cogliere l'occasione per una segnalazione fosse, comunque, opportuno [22].

Sulle terne pitagoriche e sulle formule si possono fare varie altre considerazioni, per le quali rimando alla letteratura sull'argomento (abbondante anche in *internet*), limitandomi a segnalare ordinamenti e generalizzazioni delle terne pitagoriche.

Un altro spunto, che ritengo utile proporre, è quello della *costruzione* di elementi relativi al Teorema di Pitagora, ovviamente tenendo presente la distinzione tra aspetti concettuali e aspetti operativi in relazione agli strumenti ammessi, che possono essere diversi da quelli compatibili con i criteri euclidei.

Per la costruzione concettuale dell'*angolo retto* si può utilizzare la proposizione I, 9 degli *Elementi* di Euclide (dimezzare un angolo) o una semicirconferenza; operativamente non è detto che l'uso di goniometro, squadre da disegno, carta quadrettata, altri materiali (compresa la fune con nodi degli arpenodapti egizi) diano risultati peggiori. Per la costruzione di *un triangolo rettangolo* occorre, ovviamente, tenere conto di eventuali vincoli su angoli, lunghezze, aree.

Non mi soffermo sull'argomento, come pure sulla utilizzazione del Teorema di Pitagora nella risoluzione di *problemi* e nello svolgimento di *esercizi*, per passare all'ultimo spunto che voglio proporre: il *geopiano* nella versione che chiamo *a quadrati* (Fig. 10, Fig. 11, Fig. 12) per distinguerla da quelle con altre disposizioni dei "chiodini" (ad esempio, quella isometrica di Fig. 13). Il geopiano di Fig. 10 ha 11×11 chiodini e 100 quadratini di lato 1; quello di Fig. 11 ha 3×3 chiodini e 4 quadratini di lato 1.

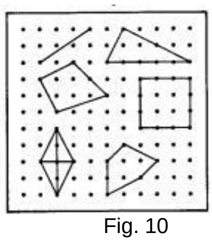
Fig. 10

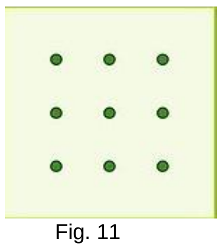
Fig. 11

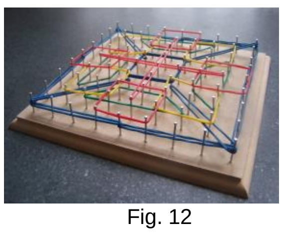
Fig. 12

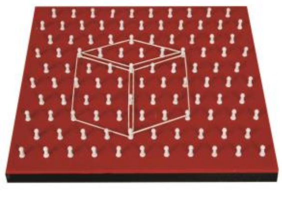
Fig. 13

Alle motivazioni di attenzione particolare ai geopiani come materiale utilizzabile in vari modi nel tempo, che ho avuto occasione di formulare in un ricordo di Caleb Gattegno [23], mi pare doveroso aggiungere, qui, quella di strumento di sollecitazione – non soltanto scolastica – a "esperimenti" e "verifiche" sul Teorema di Pitagora, guidati dal ragionamento, dall'età della scuola primaria a quelle dell'università e della formazione (iniziale o in servizio) di insegnanti: i risultati significativi degli esperimenti potranno essere documentati e riprodotti su carta quadrettata (o su altri fogli, come la carta isometrica per i chiodini di Fig. 13). Ovviamente, in esperimenti possono essere utilizzati ritagli su carta quadrettata.

Invitando a tenere presenti, in particolare, eventuali limitazioni alla costruibilità con elementi dati e individuazione di possibilità, come esempio sulla prima propongo il trasferimento di Fig. 8 e Fig. 9 su un geopiano (o una sua parte) di 25×12 chiodini, eventualmente sostituendolo con un foglio di carta quadrettata: ricostruire Fig. 8 può essere considerato banale, mentre per Fig. 9 va notato che le altezze relative alle ipotenuse 15 e 20 sono ordinatamente $7,2$ e $9,6$ non corrispondenti a chiodini [24].

Come semplice esempio di individuazione di possibilità invito a considerare quello di tutti i possibili triangoli rettangoli sul geopiano di Fig. 11 [25].

Ho constatato che il quesito, apparentemente semplice, sul numero di quadrati costruibili su questo geopiano 3×3 porta frequentemente alla risposta “incompleta” 5 (4 di lato 1 e 1 di lato 2) per l’omissione proprio di quello collegabile al teorema di Pitagora (Fig. 14); e alla segnalazione capita di sentirsi dire “Ma questo è un rombo!”. Uso analogo di “rombo” si ha per il segnale stradale di diritto di precedenza (Fig. 15).

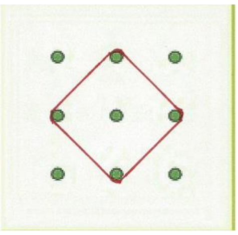

Fig. 14

Fig. 15

Confido che gli spunti proposti mi consentano di concludere auspicando uno schedario in *internet* (con lemmario e rimandi) curato da qualcuno che abbia la possibilità e gli strumenti per un servizio sistematico, anche di guida a ricerche, aperto a contributi e osservazioni.

[11] La prima parte è nel n. 201.
In http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/g388a01.htm sono inseriti complementi e *link*.
[12] Già docente dell’Università degli Studi di Milano.
E-mail: gabriele.lucchini@unimi.it.
Pagine *internet*: http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/gabl00.htm.
Sarò grato di osservazioni e suggerimenti.
[13] Le proposizioni sono riportate, oltre che in vari siti *internet*, in http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/rp-tdp2.htm; in *internet* si trova, anche, l’unificazione nel teorema di Carnot (o del coseno).
[14] Per indicazioni su miei articoli e sulla mia utilizzazione di questionari segnalo http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/rp-q.htm.
[15] Informazioni su *Matematiche complementari* come insegnamento universitario sono inserite in
http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/rp-mc.htm.
[16] Il libro è *Matematica per gli insegnanti di Matematica* di Francesco Speranza (Zanichelli, 1983); la frase citata è in fondo a pag. 9. Ritengo che questa svista non sminuisca l’importanza del libro.
[17] “Quesiti e questionari per stimolare riflessioni sulla Matematica” in http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/gld57.htm.
[18] Ma soltanto 12 hanno motivazione adeguata.
[19] Fig. 8 e Fig. 9 utilizzano la terna $\langle 9, 12, 15\rangle$ e le terne $\langle 12, 16, 20\rangle$ e $\langle 15, 20, 25\rangle$ (ottenute quadruplicando e quintuplicando i numeri di $\langle 3, 4, 5\rangle$) per un interessante accostamento, che può essere collegato alla Fig. 4 (della prima parte) e che verrà ripreso dopo Fig. 13. Si noti fin d’ora che è $15\times20 = 25\times12 = 300$.
[20] La terna $\langle 3, 4, 5\rangle$ è generata da $m = 2$ e $n = 1$; la $\langle 6, 8, 10\rangle$, ottenuta raddoppiando i numeri di $\langle 3, 4,5\rangle$, è generata da $m = 3$ e $n = 1$.
[21] Ritengo che per parlare di omissioni o dimenticanze occorra che l’autore sia a conoscenza di ciò che omette o dimentica.
[22] Non ritengo di soffermarmi in indicazioni su altre fonti.
[23] Segnalo http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/l-gatt0.htm.
[24] Si noti che è $9\times12 = 108 = 15\times7{,}2$ e $12\times16 = 192 = 20\times9{,}6$ (e $3\times4 = 12 = 5\times2{,}4$ e $6\times8 = 48 = 10\times4{,}8$).
[25] Invito a tenere presente la constatazione successiva nel testo.

«Matematiche Visioni»

L’ITIS G. Marconi di Verona ha pubblicato, a maggio, il libro *Matematiche Visioni* di Giuliana Breoni, già docente di matematica e socia Mathesis.

Il testo è una curiosa e insolita lettura. Si tratta di lezioni che la nostra socia ha tenuto nell’ambito del Cineforum del Marconi (dal 2009 al 2014), dopo la proiezione di alcuni film da lei scelti, con l’idea di collegare due linguaggi, quello filmico e quello matematico, per unire così l’umanesimo delle scienze, delle lettere e delle arti, come si legge in apertura del lavoro. I film sono stati scelti per i riferimenti matematici anche appena accennati nella trama e nelle scene, che la collega ha colto e usato come spunto per una più consistente riflessione. L’operazione ha avuto successo considerando il numero di alunni che liberamente hanno seguito nel corso dei cinque anni questo progetto, con la loro assiduità e le loro domande. Sicuramente la scelta di percorsi alternativi per incuriosire e interessare i ragazzi alla matematica è possibile e vincente. Questa materia così ostica in una società tendenzialmente “umanistica” come quella italiana, va curata e presentata anche in modo ludico.

La sezione di Verona della Mathesis ha dato il patrocinio all’opera. Ogni faticoso tentativo di diffondere il pensiero matematico è sostenibile, se ci sono le caratteristiche essenziali di qualità. Il lavoro può essere condiviso e utilizzato per proporre all’interno delle proprie scuole progetti simili.
Il volume (148 pagine) non è in commercio in quanto edito da “I Quaderni del Marconi” - iniziativa editoriale dell’ITIS Marconi - stampato in proprio, ma si può avere con il piccolo contributo di cinque euro chiedendolo o alla scuola o alla sezione veronese della Mathesis (spese di spedizione a carico del richiedente).

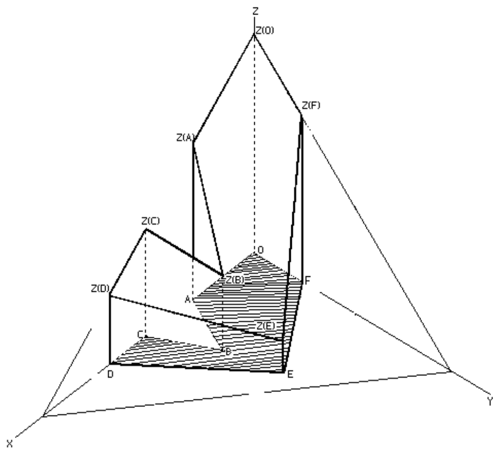

Fig. 16. Vi sembra possibile che il poligono concavo OABCDEF rappresenti una regione delle soluzioni ammissibili in programmazione lineare? (disegno di L. Corso)

Non Chiederci La Parola

di Eugenio Montale

Non chiederci la parola che squadri da ogni lato
l'animo nostro informe, e a lettere di fuoco
lo dichiari e risplenda come un croco
perduto in mezzo a un polveroso prato.

Ah l'uomo che se ne va sicuro,
agli altri ed a se stesso amico,
e l'ombra sua non cura che la canicola
stampa sopra uno scalcinato muro!

Non domandarci la formula che mondi possa aprirti,
sì qualche storta sillaba e secca come un ramo.
Codesto solo oggi possiamo dirti,
ciò che non siamo, ciò che non vogliamo.

Tratto da «Ossi di Seppia» (1925)