

Modelling the Future

Len Bos [*]

[Segue dal n. 203]

A Second Approach

Part of the problem is that we have decided that absolutely for sure the temperature in one hour will be between -1 and $+1$. But how can we be so certain? Perhaps it's better to allow higher or lower temperatures but make sure that they are low probability events. Let's see what happens if instead of a jump of $\pm 1/n$ degrees per time step, we allow a jump of a general $\pm u$. In this case the value of the temperature T_1 with j "+"s is $T_1 = ju + (n - j)(-u) = 2ju - nu$. We can calculate (with some effort!) its mean

$$E(T_1) = \sum_{j=0}^n (2ju - nu) \binom{n}{j} q^j (1 - q)^{n-j} = nu(2q - 1)$$

Its variance is

$$\text{Var}(T_1) = 4nu^2q(1 - q).$$

Now, for each n we are trying to model the same thing, the temperature after one hour (and the scenarios of intermediate temperatures). Hence it should be the case that the $\text{Var}(T_1)$ stabilizes (i.e., has a limit) as $n \rightarrow \infty$. For this to be the case u^2 should be proportional to $1/n$, i.e., $u = \sigma/\sqrt{n}$ for which

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_1) = 4\sigma^2q(1 - q).$$

By the way, the constant of proportionality σ is often called the *volatility* of the model; the bigger it is the larger the variance and hence the "uncertainty". What about the mean? Here arises a subtle point. If q is fixed, then, with our choice of u ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(T_1) = \infty!$$

This is clearly wrong! The problem is with fixing the probability q of the temperature increasing by u during a time interval of length $1/n$. In fact, as n increases the time interval shortens and the difference between a change of $+u$ and one of $-u$ diminishes! Hence our "certainty" of what will happen should also decrease, i.e., q should approach $1/2$, exactly when we can't say what is more likely an up or a down. In other words $q = q_n = 1/2 + \text{something that goes to zero with } n$. Now consider specifically,

$$q_n = \frac{1}{2} + a/(2\sqrt{n})$$

for some constant a (positive or negative). Then substituting this in the expression for the mean, we obtain

$$E(T_1) = \frac{n}{\sqrt{n}} \sigma \frac{a}{\sqrt{n}} = a\sigma$$

and so if we choose a value μ for what we believe the mean to be and set $a = \mu/\sigma$, we have

$$E(T_1) = \mu$$

independently of n !

In summary, setting $u = \sigma/\sqrt{n}$

and

$$q_n = \frac{1}{2} + \mu/(2\sigma\sqrt{n})$$

we have a Binomial Distribution for T_1 with mean $E(T_1) = \mu$ and variance $\text{Var}(T_1) = 4\sigma^2q_n(1 - q_n) \rightarrow \sigma^2$ as $n \rightarrow \infty$. Figure 3 shows the probability distribution for $n = 20$, $\mu = 0.5$ and $\sigma = 1$. Superimposed is an approximating Normal distribution. You can see that the fit is quite good, but that's a whole other story! Anyways, now that we have a reasonable seeming model, we can use it (test it!) by trying to calculate things like: the probability that the temperature is higher than $1/4$ degree?

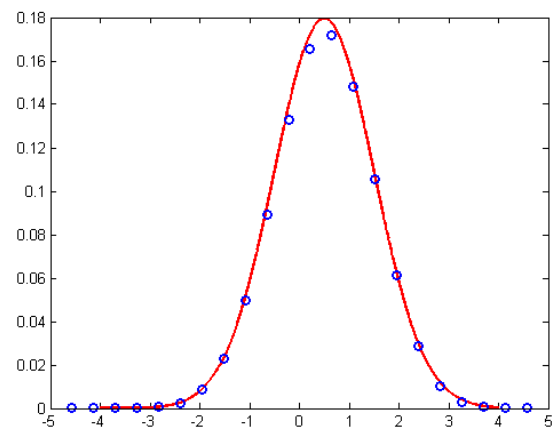


Figure 3 – The Probability Distribution

Or what is the probability that the temperature is between $-1/4$ and $3/4$ degrees? Also, since our model also generates a list of possible scenarios, we could ask things such as what is the probability that the maximum temperature during the hour is at least $-1/2$? The possibilities are endless. In a future article we will see how such models can be used to give "fair" prices to complicated Financial Instruments. In the mean time, see if you can work some of these questions out! Have fun. We should also mention that, in the limit as $n \rightarrow \infty$, this discrete model becomes the famous Brownian Motion! Below we show some of the (infinite number of!) resulting possible scenarios, with the same parameters as above.

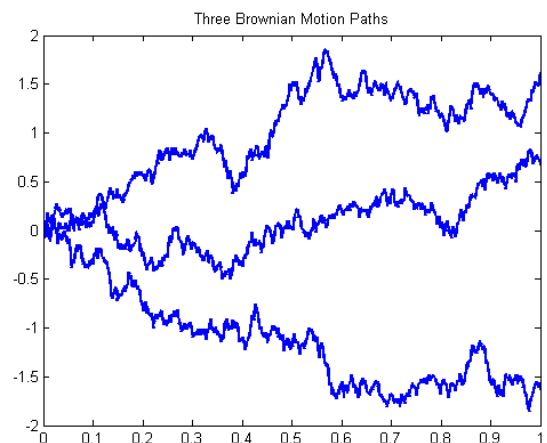


Figure 4 – Three Brownian Motion Paths (Scenarios)

[*] Professore Ordinario di Analisi Numerica, Università degli Studi di Verona. E-mail: leonardpeter.bos@univr.it

Spunti sul Numero dei Poliedri regolari [1]

di Gabriele Lucchini [2]

Nella *home page* del portale della Mathesis nazionale è consultabile un editoriale del *Periodico di Matematiche* con «La tavola degli apprendimenti a conclusione del liceo scientifico», integrato da alcuni commenti [3]. La “tavola” (soltanto richiamata con la Fig. 1, in quanto ritenuta nota e, comunque, facilmente reperibile) è chiamata, anche “quadro di Mondrian”, nel senso che i “21 punti focali” sono inseriti nella *Grande composizione A* (1920) di Pieter Cornelis Mondriaan, meglio conosciuto come Piet Mondrian [4].


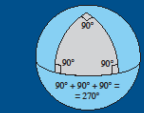

| | | | | |
|---|---|--|---|--|
|  | Qual è il grafico di $y=f(x)$? | $e^{ix} + 1 = 0$ | $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ | Esistono solo cinque poliedri regolari |
| Equazioni di luoghi geometrici | Permutazioni Disposizioni Combinazioni | Come approssimare e, π, φ |  | \aleph_0 Chi è alephzero? |
| I teoremi di Lagrange, Rolle, l'Hôpital | Problemi di massimo e minimo Il principio di induzione | Applicazione degli integrali al calcolo di aree e volumi | Dall'andamento del grafico alla possibile espressione analitica della funzione | Come approssimare un integrale definito |
| Principio di Cavalieri | Cos'è un sistema assiomatico? | Quante volte devo giocare al lotto per vincere? | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ |  |

Fig. 1. MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche: Tavola degli Apprendimenti a Conclusione del Liceo Scientifico

Ancor prima di entrare nel merito degli inserimenti, ho molto apprezzato l'idea della “tavola”, in particolare dal punto di vista del proporre un quadro (anche se, a mio parere, vivacizzabile) e di farlo utilizzando un'opera di P. Mondrian [5], che – indipendentemente dal vincolo sul numero degli inserimenti – ben si presta allo scopo.

Per quanto riguarda i “punti”, mi limito a segnalare uno, sul quale, avendone già scritto al Presidente nazionale, ritengo opportuno invitare a riflettere: quello della casella in alto a destra, dove si legge:

«Esistono solo cinque poliedri regolari»,

che sono quelli di Fig. 2 (e, in versione “dadi”, di Fig. 3) e sui quali pare superfluo soffermarsi, qui.

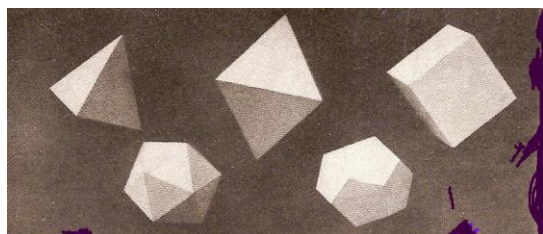


Fig. 2



Fig. 3

Continuo a ritenere che – per evitare definizioni più complicate – sarebbe stato necessario aggiungere “convessi”, lasciando ai singoli insegnanti la valutazione della opportunità di ampliare il discorso agli altri quattro (Fig. 4) e alla interessantissima questione dei tempi di “scoperta” e di “risoluzione” del problema della *omissione* di Euclide.

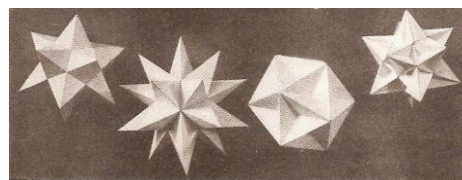


Fig. 4

Come è ben noto, all'interno della proposizione 18 del libro XIII degli Elementi di Euclide (uso la ristampa 1988 della edizione italiana a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, 1970) a pag. 1038 è scritto [6]:

Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette, non può costruirsi nessun'altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, tra loro uguali.

La dimostrazione di Euclide è chiara e ben utilizzabile per farla trovare agli alunni, ma non è questo che qui interessa [7].

La questione sta nel fatto che Euclide non aveva motivo di pensare ai poliedri non convessi perché non risulta che ai suoi tempi qualcuno li avesse considerati: in seguito sono stati trovati altri quattro poliedri regolari nel senso della definizione euclidea, ma *stellati* o *sfaccettati* (v. Fig. 4), ed è stato dimostrato che non ne esistono altri.

Ritengo particolarmente significativo ricapitolare i tempi nella Tabella 1 [8].

| Tabella 1 | | |
|-----------|------------------------|--|
| - 300 c. | Euclide: | dimostrazione predetta; |
| 1619 | Joannes Kepler: | piccolo dodecaedro stellato e grande dodecaedro stellato |
| 1811 | Louis Poinsot | grande dodecaedro sfaccettato e grande icosaedro sfaccettato |
| 1813 | Augustin Louis Cauchy: | dimostrazione della non esistenza di altri poliedri regolari |

Invito a tenere presenti, ed eventualmente a cercare (anche in *internet*, in particolare nelle immagini), almeno alcuni tra i numerosi altri spunti che i poliedri, non soltanto regolari, offrono per considerazioni matematiche, per collegamenti ad altre discipline e a esperienze, per riferimenti storici e di attualità.



Fig. 5

[1] In <http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/g388a01.htm> sono inseriti complementi e *link*, in parte segnalati nel seguito.

[2] Già docente dell'Università degli Studi di Milano.

E-mail: gabriele.lucchini@unimi.it.

Pagine *internet*: <http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/gabl00.htm>.

[3] N. 1 del 2014 (pp. 5-9); in *internet* sono disponibili altri testi, anche nel sito della Mathesis di Verona.

[4] Riproduzioni del quadro sono reperibili in *internet*.

[5] Ho fatto riferimenti a P. Mondrian (con fotografia, riproduzioni e spunti collegati al geoplano) in *.../l-gatt1.doc* (vedi *link* della nota [1]).

[6] L'enunciato della proposizione XIII, 18 è: «Trovare gli spigoli delle cinque figure [poliedri regolari] e paragonarli fra loro.»

[7] Ho già esposto queste considerazioni, in particolare, in *Matematica e insegnanti della formazione primaria - Prima parte* (CUSL, 2001).

La dimostrazione (che i poliedri regolari convessi sono cinque) è riprodotta in *.../l-eu1.doc* (vedi *link* della nota [1]).

[8] Per i dati delle pubblicazioni rimando ai complementi.

[9] Riproduzioni della litografia sono reperibili in *internet*.

[10] Anche questo stimolo è già presente nel libro citato in nota 7. L'oggetto può essere visto come “scheletro” di un cubo.