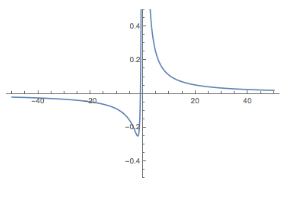
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente



Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 205 – Pubblicato il 01 – 10 – 2015

Elementi di Analisi Non Standard

A cura del gruppo NSA di Verona [*]

Introduzione storica

L'analisi matematica nasce nel XVII secolo con Newton e Leibniz, che adoperarono gli infinitesimi, e prese il nome di calcolo infinitesimale. Fino alla metà del XIX secolo si è sviluppata trattando funzioni in un campo numerico che includeva gli infinitesimi. Rolle, Lagrange, Eulero, i Bernoulli, Fermat, De l'Hopital, Taylor, Mac Laurin e tutti gli altri grandi matematici di quel periodo ottenevano i loro risultati utilizzando e ragionando sugli infinitesimi. Detto altrimenti i metodi dell'analisi non standard sono stati alla base della nascita e della crescita dell'analisi matematica. In una mentalità rigidamente archimedea, dalla metà del XIX secolo, si vollero recuperare gli ottimi e abbondanti risultati ottenuti, evitando di usare gli infinitesimi. Così si elaborarono macchinosi concetti sostitutivi e ci si basò sul concetto di «vicino». Poiché ha senso parlare solo di *più vicino di* ..., il concetto di «vicino» non è assoluto come invece quello di infinitesimo (un infinitesimo è infatti assolutamente piccolo). Pertanto si dovette complicare tutta la trattazione introducendo l'artificiosità della definizione ε-δ di limite. Questa, dall'errore di approssimazione concesso al risultato finale, indietreggia alla precisione che devono avere i dati in ingresso per rimanere nell'approssimazione finale concessa. Con questa complicazione si è riusciti a riottenere tutti i risultati teorici già conseguiti usando gli infinitesimi. Ottenuto questo successo si bandirono definitivamente gli infinitesimi e iniziò l'analisi matematica, che oggi è quella standard. Nella prima metà del XX secolo cominciarono a fiorire i modelli non standard, cioè strutture in cui erano vere tutte le affermazioni vere in una struttura intesa [1], ma non isomorfe a questa, seppure non distinguibili da questa mediante il linguaggio. Già allora si sapeva che questi modelli non standard erano consistenti se e solo se lo erano quelli intesi (evidenziando una situazione del tutto simile a quella delle geometrie non euclidee); ma questi modelli venivano visti come strane patologie introdotte dai logici. Fu merito di Abraham Robinson con la sua opera (*Non Standard Analysis* – 1966 [B.1]), accorgersi che con opportuni modelli non standard si potevano recuperare tutti i metodi infinitesimali sviluppati dall'inizio del calcolo infinitesimale fino a metà XIX secolo.

L'opera di Robinson doveva anzitutto superare certi preconcetti legati ai metodi dell'analisi diventata standard [ad esempio: 1) categoricità al secondo ordine del sistema dei reali, che deriva dalla categoricità del sistema dei numeri naturali, e 2) la nozione cantoriana d'infinito come unica nozione di infinito], e in effetti mostra come la categoricità sia legata a limitazioni ingiustificate tra i possibili modelli del secondo ordine e come gli infinitesimi, che esibiscono una nuova nozione di infinito, possano essere coerentemente introdotti. Poi essa vuole mostrare quanto un modello non standard che includa gli infinitesimi possa essere utile per ottenere facilmente nuovi risultati, e con il nuovo metodo risolve per la prima volta un problema aperto di analisi. L'opera di Robinson con tutti questi traguardi raggiunti è profonda e ostica alla lettura, richiedendo di essere ben introdotti alla logica. Comunque, la nuova precisazione del concetto d'infinitesimo supera le difficoltà che, nella seconda metà dell'Ottocento, portarono al suo abbandono. La proposta di Robinson, con i relativi sviluppi degli anni successivi, permette una presentazione molto più naturale e diretta dei risultati conseguiti dall'analisi matematica e introduce un nuovo e più potente strumento per modellizzare i problemi che provengono dalle applicazioni. Dopo il lavoro di Robinson la presentazione dell'analisi matematica che utilizza gli infinitesimi prende il nome di *Analisi Non Standard* (NSA).

Vari autori, Keisler *in primis*, si accorsero delle vantaggiose ricadute didattiche offerte dall'accettazione degli infinitesimi (possibile grazie alla loro nuova precisazione). Tra esse, molto rilevanti sono il superamento della definizione classica di limite e degli artificiosi procedimenti dimostrativi a essa legati e un maggiore ricorso ai processi naturali, ma completamente rigorosi, nel calcolo degli infiniti e degli infinitesimi, recuperando, in modo più diretto, tutti i tradizionali contenuti del calcolo differenziale e integrale.

Un episodio storico

Ci sono due momenti che accompagnano l'attività di un matematico: quello della scoperta e, a posteriori, quello della dimostrazione. Per il loro collegamento diretto e naturale con quello che si vuole esprimere, i metodi infinitesimali, almeno fino alla seconda metà del XX secolo, appartengono proprio a quella prima fase euristica che, pur insoddisfacente per coloro che rifiutano aprioristicamente gli infinitesimi, ha prodotto risultati straordinari.

Torniamo allora per un momento al 1748 e osserviamo Leonhard Euler al lavoro [2]:

Sia i un numero infinitamente grande, più grande di ogni numero concepibile. Allora la frazione $(i-1)\,/\,i$ *è uguale a* 1*. Per lo stesso motivo* $(i-2)\,/\,i = 1$*,* $(i-3)\,/\,i = 1$*; di conseguenza possiamo scrivere*

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2};\quad \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3};\quad \frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4};\quad \ldots$$

Queste equazioni meritano un commento che può partire dall'ultima. Se i numeri, anche infiniti, devono avere le solite proprietà allora $(i-3)\,/\,4i = (i\,/\,4i) - (3\,/\,4i) = (1/4) - ((3\,/\,4) \times (1\,/\,i))$. Poiché, per l'infinità di i, $1\,/\,i$ è un infinitesimo (come pure $(3\,/\,4) \times (1\,/\,i)$), questo è una quantità trascurabile sicché sostanzialmente si ottiene $1\,/\,4$.

Anche negli altri casi, le uguaglianze sono giustificate dal trascurare alla fine dei vari passaggi addendi trascurabili (infinitesimi) rispetto a quanto resta.

Quindi [B.11]:

$$\begin{aligned} e^x &= \left(1+\frac{x}{i}\right)^i \\ &= 1 + i\cdot\frac{x}{i} + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{i^2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{i^3} + \ldots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \end{aligned}$$

Certo, poiché *in rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi*, sarebbe difficile accettare l'eguaglianza di i e $i-1$, per quanto grande sia i, ma non è ciò che si fa, bensì si trascurano infinitesimi rispetto a quanto rimane. Così, nonostante ingegneri e fisici mai abbiano smesso di usare infiniti e infinitesimi nel loro lavoro, la matematica pura, per una preconcetta mentalità archimedea emersa nel XIX secolo che ha portato al bando degli infinitesimi, li ha esclusi (almeno nella fase dimostrativa). Eppure, se l'uso degli infinitesimi dà la risposta giusta ai problemi, non sarà corretto anche il ragionamento che porta alla soluzione? [B.8].

Concetti fondamentali dell'Analisi Non Standard

La motivazione fondamentale della NSA è quella di rendere rigorosi i ragionamenti con gli infinitesimi. Per questo Robinson costruì un sistema numerico che li includesse estendendo in modo opportuno il campo dei numeri reali.

Definizione di infinitesimo: *Un numero* ε *si dice infinitesimo se* $|\varepsilon| < a$, $\forall\, a \in \mathbf{R}^+$ *o, equivalentemente, se* $|\varepsilon| < 1/n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^+$.
Naturalmente, la semplice dichiarazione di cosa si intenda per numero infinitesimo non ne garantisce l'esistenza. Come per tutti i numeri costruiti dall'umanità essi sono accettabili (dichiarati esistenti) se non portano a contraddizione e anzi permettono una più facile gestione delle situazioni da affrontare. Allo scopo, è opportuno dichiarare esplicitamente questa scelta, eventualmente ricorrendo a un assioma che, in questo caso, può essere o l'assunzione che esiste un numero infinitesimo positivo ε, o quella che il nuovo sistema numerico che vuole includere gli infinitesimi sia un'estensione propria dei reali.

Si dice poi che «*x è infinitamente vicino a y*» e si scrive $x \approx y$ se la differenza tra x e y è infinitesima.

Definizione di numeri finiti e numeri infiniti: Nel nuovo sistema numerico che contiene infinitesimi e reali, *si dice che un numero x è finito se in valore assoluto è minore di almeno un numero reale positivo.*
Si può dimostrare che ogni numero finito x è somma di un numero reale r (unico) e di un infinitesimo ε. Dalla definizione è ovvio riconoscere che tutti i numeri reali e tutti gli infinitesimi sono finiti. Se $x = r + \varepsilon$, con $r \in \mathbf{R}$, r si chiama la **parte standard** di x e si indica con la scrittura $st(x)$. *Se x non è finito allora si dice infinito* (*o infinitamente grande*). Numeri infiniti certamente esistono; basta prendere l'inverso di un infinitesimo.

Definizione dei numeri iperreali: Chiameremo numeri iperreali quelli dell'estensione propria dei reali che contiene gli infinitesimi. Essi si possono suddividere in numeri infiniti, finiti non infinitesimi, infinitesimi non nulli e lo zero. Volendo ottenere un sistema numerico conveniente, si deve accettare che l'insieme ***R** degli iperreali è un campo ordinato $\{{}^*\mathbf{R}, +, \cdot, \leq\}$ che amplia **R** (l'insieme dei numeri reali è infatti l'insieme delle parti standard degli iperreali finiti). ***R** quindi gode delle stesse proprietà algebriche di **R** con una sostanziale differenza: viene meno la proprietà archimedea, se riferita ai naturali intesi (e quindi viene meno la completezza). Cioè, mentre presi due numeri reali a_1 e a_2, maggiori di zero e con $a_1 < a_2$, è sempre possibile trovare un naturale positivo n tale che $n\,a_1 > a_2$, quando siamo in presenza di due numeri iperreali ciò non vale più: se si aggiunge a se stesso un qualsiasi infinitesimo positivo per un numero naturale positivo qualsiasi di volte si ottiene sempre un infinitesimo e non si raggiunge mai 1. La ragione è che il postulato archimedeo nega l'esistenza sia di numeri infiniti, sia di numeri infinitesimi [B.3].

Le operazioni sugli iperreali sono presentate nella sottostante tabella 1. Diamo il glossario:
i = infinitesimo
inn = infinitesimo non nullo;
f = finito;
fni = finito non infinitesimo;
I = infinito;
"?" = ipotesi non sufficienti per determinare il risultato.

Tabella 1

+	*inn*	*fni*	*I*
inn	*i*	*fni*	*I*
fni	*fni*	*f*	*I*
I	*I*	*I*	?

×	*inn*	*fni*	*I*
inn	*inn*	*inn*	?
fni	*inn*	*fni*	*I*
I	?	*I*	*I*

x	−*x*	1 / *x*
inn	*inn*	*I*
fni	*fni*	*fni*
I	*I*	*inn*

/	*inn*	*fni*	*I*
inn	?	*inn*	*inn*
fni	*I*	*fni*	*inn*
I	*I*	*I*	?

Definizione di monade: *Si chiama monade di un numero iperreale l'insieme di tutti i numeri che gli sono infinitamente vicini.* Dati due reali distinti x_1 e x_2, essi hanno due monadi distinte (prova omessa) [B.1].
Ai numeri iperreali infinitesimi non è attribuibile uno specifico valore e non sono distinguibili se non quando uno è costruito in modo determinato dall'altro. Di fatto ciò non crea un ostacolo poiché in molte nozioni si richiede che si ottengano risultati con la stessa parte standard comunque siano determinati gli infinitesimi coinvolti. Così, l'insieme degli iperreali tra loro infinitamente vicini (la monade) diventa molto importante.

Confronto tra numeri iperreali: *Diciamo che x è infinitamente più piccolo di y e scriviamo* $x = o(y)$ *se* x / y *è infinitesimo.*

Diciamo che x e y sono indistinguibili se x / y *è infinitamente vicino a* 1.

Principio di estensione: Per ogni funzione reale f di una o più variabili, tra le sue tante estensioni agli iperreali, ce n'è una particolare ${}^*f$ dello stesso numero di variabili che è detta l'estensione naturale di f.

Principio di trasferimento: Ogni enunciato esprimibile nel linguaggio L del primo ordine adatto ai numeri reali (combinazioni di equazioni, disuguaglianze, ecc. tra termini reali) è vero quando è interpretato nella struttura dei reali se e solo se è vero anche quando è interpretato nella struttura degli iperreali. Ciò comporta che una funzione reale e la sua estensione iperreale naturale hanno esattamente le stesse proprietà esprimibili nel linguaggio adatto ai reali. In questo modo viene resa precisa la richiesta di Leibniz che i nuovi numeri dovessero avere esattamente tutte le stesse proprietà dei numeri allora accettati (sostanzialmente i reali), specificando che si tratta delle proprietà esprimibili nel linguaggio.

L'analisi non standard è un sistema di enunciati coerente

Si dimostra che il sistema di assiomi che emergono direttamente dalle assunzioni e dai principi finora enunciati è consistente relativamente alla consistenza della teoria dei reali e viceversa.

Tra gli anni '60 e gli anni '70 i lavori di Abraham Robinson e di altri hanno dimostrato che il corpo dottrinario su cui si basa l'analisi non standard è credibile e accettabile quanto quello dei numeri reali; detto altrimenti, l'introduzione degli infinitesimi non porta a contraddizioni se non ce n'erano già nella teoria dei reali [B.1, Capitolo 2°]. Non ci sono perciò assunzioni più compromettenti per la consistenza che possano motivare l'introduzione di una teoria rispetto all'altra. Si tratta semplicemente di accettare la diversa nozione di infinito che proviene dall'introduzione di infinitesimi e naturali infiniti.
[*Segue al numero* 207]

[1] Una struttura intesa è quella che è nella mente di chi espone.
[2] Inizia così il paragrafo 116 del settimo capitolo del Tomo Primo dell'*Introductio in Analysin Infinitorum*: "*Cum autem i sit numerus infinite magnus*…"

[*] Leonardo Aldegheri, Alberto Burato, Luciano Corso, Ruggero Ferro, Bruno Stecca, Daniele Zambelli.