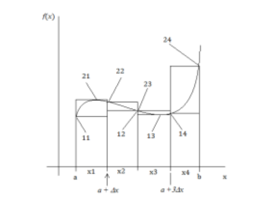
MatematicaMente

ISSN: 2037-6367

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 207 – Pubblicato il 05 – 12 – 2015



Elemento di Analisi Non Standard

A cura del gruppo NSA di Verona [*]

[*Segue dal numero* 205]

L'insegnamento dell'Analisi Non Standard

Dovremmo essere d'accordo se affermiamo che l'insegnamento dell'analisi classica presenta difficoltà che derivano soprattutto dalla separazione tra una comprensione iniziale diretta, approssimativa e parziale degli argomenti da trattare, quasi un'intuizione, e l'espressione formalizzata di concetti e risultati sofisticatamente complicati per evitare gli infinitesimi. Si prenda per esempio la definizione di continuità per una funzione reale f in un punto x_0 del suo dominio D:

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0 : \forall x\in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ .$$

Nessuna sorpresa se la maggior parte degli studenti delle scuole superiori trova completamente oscura una simile formulazione (e non aiuta certo una fedele traduzione dei simboli nel linguaggio naturale). Per loro fortuna, però, nella pratica didattica si scende pragmaticamente a un livello più intuitivo e *soft*. La "definizione" assume allora una forma che si avvicina a questa: *Se $f(x)$ è "arbitrariamente vicino" a $f(x_0)$ per ogni x (nel dominio di f) "sufficientemente vicino" a x_0*, allora *si dice che f è continua in x_0*. In questa formulazione non è didatticamente chiaro cosa si intenda per "sufficientemente vicino" e "arbitrariamente vicino" e, con questa difficoltà, non sappiamo se si sia fatta la fortuna o la sfortuna degli studenti che ritrovano le difficoltà precedenti dette in modo più oscuro.
Sostituiamo "sufficientemente" e "arbitrariamente" con *infinitamente* e otteniamo il concetto di limite della NSA!

$$\forall x\ ((x \approx x_0, x \neq x_0) \Rightarrow (f(x) \approx f(x_0)))\ . \qquad (1)$$

Se adottiamo i suoi concetti e i suoi metodi, acquistano senso e un significato matematicamente preciso espressioni e ragionamenti che altrimenti rimangono tentativi più o meno felici di comunicare in modo semplice ed elegante idee fondamentali [B.7].

I lavori di Keisler [B.2] e altri vanno proprio in questa direzione, ma naturalmente chi intende avvicinarsi a questo approccio pone alcune domande pertinenti: gli studenti riusciranno ad acquisire tutte le conoscenze che sono richieste in un corso di analisi matematica? Il trasferimento a un corso tradizionale sarà per loro difficile? Agli insegnanti è richiesto un solido *background* in analisi non standard? Alle prime due ci sentiamo di rispondere affermando che non solo è possibile, ma anche più facile, sulla base di esperienze didattiche avviate in diversi paesi (cfr. Sullivan [B.4] e R. O'Donovan [B.9]), alla terza rispondiamo invece sottolineando che a un livello preuniversitario è importante avere (e dare agli studenti) l'apertura mentale libera da condizionamenti per lavorare anche con un diverso concetto di infinito (che va compreso). Una risposta motivata alle domande poste, può venire solo dopo un accenno ai metodi basilari dell'analisi non standard, ed è rinviata ad allora.

Derivata e Differenziale

Nel seguito adotteremo la convenzione di non indicare il prefisso «*» per funzioni e relazioni su $^*\mathbf{R}$ che estendono in modo naturale funzioni e relazioni su $\mathbf{R}$. In tal modo, per esempio, scriveremo $f(a + \delta)$ anziché $^*f(a\ ^*\!+ \delta)$, dove a è un numero reale e δ un infinitesimo: si riconoscerà dal contesto se si sta parlando di una funzione o relazione reale o della sua estensione naturale iperreale; in particolare, se è applicata a elementi non standard si tratterà dell'estensione naturale.
Inoltre, per indicare gli infinitesimi useremo le lettere greche minuscole da sole (per esempio δ, ε); mentre per indicare gli infiniti useremo quelle maiuscole con le stesse modalità (per esempio, N, H, K).

Dal suo inizio l'analisi matematica si è interessata di come variano grandezze che dipendono da altre al variare di queste. Se il legame tra certe grandezze e altre che dipendono da queste si rappresenta mediante una funzione f, la variazione della grandezza dipendente df può essere rappresentata come $f(u) - f(x)$ o come $f(x+\delta) - f(x)$ dove u e x indicano due valori della grandezza indipendente in corrispondenza dei quali si vuole determinare la variazione della grandezza dipendente e δ è la differenza $u - x$, sicché $x + \delta = u$. È evidente come la variazione della grandezza dipendente dipenda dal punto x dove viene valutata e dall'incremento δ della grandezza indipendente. La variazione di posizione durante un moto in funzione del tempo, o anche la variazione di altezza lungo un percorso in funzione della distanza percorsa, sono classici esempi di utilizzo della nozione ricordata.
Non solo interessa la variazione della variabile dipendente df ma anche il rapporto tra questa variazione e la variazione della variabile indipendente, cioè il rapporto incrementale $(f(x + \delta) - f(x)) / \delta$, che ancora dipenderà dal punto dove viene valutato e dall'incremento della variabile indipendente. Se si considera la funzione identica ($y = x$), l'incremento della variabile dipendente, ora denotabile con dx, è uguale all'incremento δ della variabile indipendente, fatto che ci permette di indicare δ mediante dx. Avendo a disposizione gli infinitesimi e le estensioni naturali delle funzioni agli iperreali, fissato il punto c nel dominio della funzione f dove si vogliono valutare le differenze e i rapporti sopra menzionati, per determinare la velocità istantanea o la pendenza nel punto o più in generale un tasso di variazione della funzione in quel punto, appare del tutto naturale considerare variazioni infinitesime (non nulle) della variabile indipendente, cioè si vuole considerare δ un infinitesimo non nullo. Ancora l'incremento della funzione $f(c + dx) - f(c)$ e il rapporto incrementale $(f(c + dx) - f(c)) / dx = df / dx$ dipendono dalla scelta dell'infinitesimo.

Può succedere che qualunque sia l'infinitesimo non nullo dx i valori del rapporto incrementale $(f(c + dx) - f(c)) / dx$ siano finiti e, in corrispondenza dei vari infinitesimi non nulli, differiscano solo per infinitesimi, cioè abbiano sempre la stessa parte standard. Tale parte standard del rapporto incrementale in c viene detta pendenza della funzione f in c, e la funzione che associa a un punto del dominio della funzione f la sua pendenza, se c'è, è detta la derivata della funzione f, e denotata da f'. L'indipendenza della parte standard del rapporto incrementale in c dall'incremento infinitesimo non nullo dx della variabile indipendente indica una certa regolarità della funzione che viene colta dicendo che la funzione in quel punto c è derivabile.

Analogamente, può succedere che qualunque sia l'infinitesimo non nullo dx i valori dell'incremento $f(c + dx) - f(c)$ della funzione siano infinitesimi e infinitamente vicini a multipli di dx secondo un opportuno numero reale a, cioè diversi da questi solo per infinitesimi di ordine superiore a dx (infinitesimi tali che il loro quoziente con l'infinitesimo che si sta considerando è infinitesimo: infinitesimi di infinitesimi). Si ha, quindi,

$$df - a\cdot dx = (f(c + dx) - f(c)) - a\cdot dx = \varepsilon\cdot dx \qquad (2)$$

per un opportuno infinitesimo ε.

Se vale (2), si dice che la funzione f è differenziabile in c e il prodotto $a\cdot dx$ si chiama differenziale di f in c, secondo una tradizione ormai consolidata. È importante ricordare che nell'impostazione originaria di Leibniz, recuperata da Robinson [B.1], il differenziale di f nel punto c è $df = f(c + dx) - f(c)$, cioè uno qualunque degli infinitesimi $a\cdot dx + \varepsilon\cdot dx$.

Si noti che $a\cdot dx$ indica un incremento di ordinata su una retta di pendenza a in corrispondenza di un incremento dx di ascissa. Così se la funzione è differenziabile in $(c, f(c))$ vuol dire che, alla scala di dx, l'incremento della variabile dipendente non è distinguibile dall'incremento lungo la retta di pendenza a passante per $(c, f(c))$: infatti $\varepsilon \cdot dx$ è infinitesimo rispetto a dx, essendo ε infinitesimo. Dunque, la regolarità della funzione f, evidenziata dall'essere differenziabile in c, consta nel differire da una retta per infinitesimi di ordine superiore nell'infinitamente vicino al punto $(c, f(c))$.

Poiché un numero differisce dalla sua parte standard per un infinitesimo, nei punti c dove la funzione f è derivabile si ha che $[(f(c + dx) - f(c)) / dx] - f'(c) = \varepsilon$ sicché, moltiplicando ogni addendo per dx, la precedente espressione equivale al seguente teorema dell'incremento:

$$f(c + dx) - f(c) = f'(c) \cdot dx + \varepsilon \cdot dx \; ; \qquad (3)$$

quindi, la funzione f è derivabile in c se e solo se è ivi differenziabile. Si noti che il numero reale richiesto dalla nozione di differenziabilità è proprio la derivata della funzione nel punto di ascissa c, e questa è la parte standard del rapporto tra l'incremento infinitesimo di f e l'incremento infinitesimo della variabile indipendente:
$f'(c) = st((df / dx)_c)$.

Si osservi che tutte le quantità indicate (valori di una funzione, valori delle variabili indipendente e dipendente, incrementi di entrambe le variabili, differenze e rapporti, numeratore e denominatore di una frazione, parti standard) sono numeri, eventualmente iperreali.

Quanto presentato si applica anche al caso in cui f sia una funzione reale definita in un intervallo aperto $I = (a, b)$. Se $c \in I$, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti [B.12]:

- f è differenziabile in c con derivata $f'(c) = L \in \mathbf{R}$;
- $(f(c + \delta) - f(c)) / \delta \approx L, \forall \delta \neq 0$; (4)
- $\forall \delta \neq 0 \;\; \exists \varepsilon : f(c + \delta) = f(c) + f'(c) \cdot \delta + \varepsilon \cdot \delta$.

Esempio: Sia $f(x) = 9x - 3x^2$. *Calcoliamo l'incremento della funzione f in corrispondenza di un incremento infinitesimo della variabile indipendente x*:

$$\begin{aligned} f(x + \delta) - f(x) &= [9(x + \delta) - 3(x + \delta)^2] - (9x - 3x^2) \\ &= (9 - 6x)\delta - 3\delta^2 , \end{aligned}$$

il termine $(9 - 6x)\delta$ *è il differenziale della funzione f in x corrispondente all'incremento infinitesimo* δ. *Inoltre, la derivata di f nel punto x è*

$$f'(x) = st((f(x + \delta) - f(x)) / \delta) = 9 - 6x .$$

Notare che f' non sempre esiste; quando esiste, $f'(x)$ è detta la pendenza della curva in x. Di fatto è la pendenza dell'unica retta per il punto $(x, f(x))$ che differisce dalla curva nell'infinitamente vicino al punto solo per infinitesimi di ordine superiore all'incremento della variabile indipendente.

Le dimostrazioni delle usuali regole del calcolo differenziale sono totalmente differenti ed estremamente più semplici di quelle classiche, non essendoci bisogno di fare alcun riferimento ai limiti. Analizziamo, come esempio, la regola della derivata della somma di funzioni f e g derivabili in c. Si deve mostrare che, qualunque sia l'infinitesimo dx diverso da zero,

$$\begin{aligned} & st\left(\frac{\left(f(x+dx)+g(x+dx)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)}{dx}\right) = \\ & = st\left(\frac{\left(f(x+dx)-f(x)\right)}{dx}\right) + st\left(\frac{\left(g(x+dx)-g(x)\right)}{dx}\right) \qquad (5) \end{aligned}$$

ma ciò è evidente perché

$[(f(x + dx) + g(x + dx)) - (f(x) + g(x))] / dx = ([f(x + dx) - f(x)] / dx) + ([g(x + dx) - g(x))] / dx)$

e la parte standard di una somma è la somma delle parti standard (vedi [B.2]). Si confronti la semplicità e la linearità di questa dimostrazione con la dimostrazione classica che richiede di aver dimostrato che il limite di una somma di funzioni (in questo caso i rapporti incrementali) è la somma dei limiti delle funzioni. Quest'ultima richiede una buona comprensione della definizione ε-δ di limite per mostrare che fissato un errore massimo per il limite della somma si può concedere la metà di tale errore massimo a ciascuno degli addendi, che, avendo limite, determineranno una massima approssimazione della variabile indipendente affinché l'errore che ne consegue sia contenuto nei limiti stabiliti. Da queste approssimazioni massime della variabile indipendente per gli addendi, si ottiene l'approssimazione massima per la somma in modo che il corrispondente errore sia contenuto entro i margini inizialmente prefissati. Si noti che l'approccio non standard con l'algebra delle parti standard porta alla determinazione delle derivate, l'approccio classico richiede di indovinare quale sarà il risultato per poi mostrare che è corretto grazie alla definizione di limite. È del tutto evidente la differenza di difficoltà tra i due approcci: quello classico è così artificioso che, nella didattica, normalmente viene tralasciato rendendo l'uso delle regole di calcolo ingiustificato e magico, con grave danno alla consapevolezza dei metodi dell'analisi, mentre l'approccio non standard permette una comprensibilissima dimostrazione che dà consapevolezza e sicurezza nell'uso del calcolo.

Anche nella dimostrazione non standard della correttezza delle regole di calcolo possono nascondersi delle insidie di cui bisogna essere avvertiti. Per mostrare ciò consideriamo il teorema che giustifica la regola di derivazione delle funzioni composte (di cui diamo per conosciuto l'enunciato).
Dobbiamo dimostrare che, date le funzioni $y = f(x)$ e $z = g(y)$ la prima derivabile in c e la seconda in $f(c)$, la funzione composta $G(x) = g(f(x))$ ha per derivata $G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Si sarebbe portati a giustificare il risultato come segue: $G'(x) = dG(x) / dx = dg(f(x)) / dx = dz / dx$ e dividendo e moltiplicando per dy si otterrebbe

$$\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \; ,$$

ma questo passaggio è sbagliato, anche se verrà giustificato proprio dalla dimostrazione che dobbiamo dare. Identificando le due occorrenze di dz non ci si accorge che in dz / dx con dz si parla del differenziale della funzione composta, mentre in dz / dy con dz si parla del differenziale della funzione g. Analogamente l'occorrenza di dy in dz / dy indica l'incremento della variabile indipendente della funzione g che deve poter essere un qualsiasi infinitesimo non nullo, mentre l'occorrenza di dy in dy / dx è il differenziale della funzione $y = f(x)$, e non è detto che questo dy assuma tutti e soli gli infinitesimi diversi da zero come è richiesto per l'altra occorrenza.
Di fatto, il differenziale dy della funzione $y = f(x)$ fortunatamente è un infinitesimo, per l'ipotesi che questa funzione sia differenziabile, ma potrebbe anche essere 0. Ciò accade quando la derivata f' in quel punto è 0, altrimenti, $f' \neq 0$ e, per il teorema dell'incremento, $dy = f'(x) \cdot dx + \delta \cdot dx$ mostra che dy non è zero non essendolo dx. Però, il fatto che la funzione $g(y)$ sia derivabile in $f(x)$, permette di dire, grazie al teorema dell'incremento, che $dz = dg(y) = g'(y) \cdot dy + \varepsilon \cdot dy$ senza richiedere che ciò valga per ogni infinitesimo dy; in particolare, se questo è nullo si ottiene che anche dz è nullo. Dividendo tutti i termini per dx, che è un arbitrario infinitesimo non nullo, si ha $dz / dx = dg(y) / dx = g'(y) \cdot dy / dx + \varepsilon \cdot dy / dx$. Volendo ottenere le derivate bisogna passare alle parti standard e l'ultimo addendo vale 0 poiché è la parte standard di un infinitesimo. Così effettivamente

$$G'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dg(y)}{dx} = g'(y) \cdot \frac{dy}{dx} + 0 = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) \qquad (6)$$

e si è dimostrato che la regola della derivata della funzione composta è corretta. Ora che il risultato è stato dimostrato non c'è più la necessità di distinguere tra i vari significati delle notazione dy, ed è spiegato il motivo per cui nella notazione non si è tenuto conto delle sue varie interpretazioni.

Lungo la strada, abbiamo fatto ricorso ai facili teoremi di analisi non standard che riguardano l'algebra delle parti standard (ad esempio se a e b sono iperreali finiti allora $st(a \cdot b) = st(a) \cdot st(b)$; vedi [B.2]). Si noti come, nonostante le attenzioni richieste, si sia ottenuta una notevole semplificazione rispetto all'usuale dimostrazione in analisi classica.
[*Segue al numero* 210]

[*] Leonardo Aldegheri, Alberto Burato, Luciano Corso, Ruggero Ferro, Bruno Stecca, Daniele Zambelli.