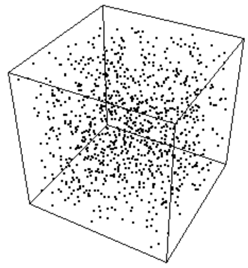
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 21 – settembre 1999



Successioni definite per ricorrenza

di Luigi Marigo

(1ª parte) In questa nota, anche in vista di più avanzati sviluppi, propongo un richiamo sulle successioni definite per ricorrenza.

Una successione $\{a_n\}$ è definita per ricorrenza se, anziché dare la legge $a_n=f(n)$, è data una relazione $a_{n+1}=f(a_1, a_2,\dots,a_n)$, ove $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ è l'insieme dei valori precedenti. Se esiste, sia finito o infinito il limite per $n \to \infty$ di a_n, è evidente che non può essere deciso con gli ordinari criteri della teoria dei limiti, inoltre deve essere dato il valore iniziale a_1. Nel caso particolare, $a_{n+1}=f(a_n)$ si procede di regola così: si ammette, per ipotesi, che esista

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

finito o infinito; scrivendo poi

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

($f(a_n)$ è per ipotesi continua), e quindi $a=f(a)$, ammettiamo esplicitamente che, se un limite esiste, esso soddisfa necessariamente l'equazione $a=f(a)$, detta "dei punti fissi" e che va risolta

- usando poi criteri di esistenza dei limiti (successioni monotone, successioni di Cauchy), ed eventualmente il principio di induzione, si cerca di dimostrare che la successione ammette limite.
- Se ciò riesce, si sceglie tra le soluzioni della equazione $a=f(a)$ quella compatibile con la condizione iniziale. La distinzione tra il second e il terzo passo può non essere netta.

È utile un esercizio: si studi la successione

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} \qquad \left(a_n \ge 0, \quad \forall n\in \mathbf{N}\right).$$

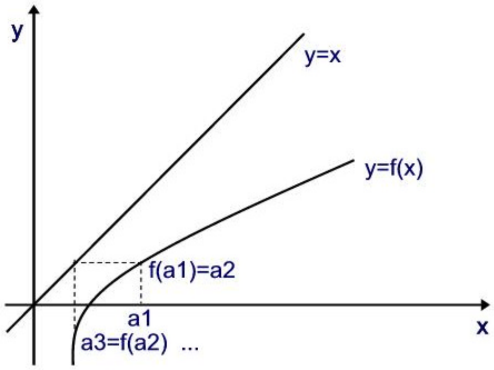


Fig. 1

Se esiste il

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

è allora $a=\sqrt{a}$, $a^2-a=0$, equazione che ammette soluzioni proprie $a=0$, $a=1$ e impropria per $a\to\infty$. Analizziamo le varie possibilità:

se $a_1=0$ è allora $\forall n\in N$, $a_n=0$ e $[n\to\infty]\Rightarrow[a_n\to 0]$;

se $a_1=1$ è allora $\forall n\in N$, $a_n=1$ e $[n\to\infty]\Rightarrow[a_n\to 1]$.

Se $0<a_1<1$ allora si dimostra per induzione che $\forall n\in \mathbf{N}$ è $a_n<1$ e che $\forall n\in \mathbf{N}$ è $a_{n+1}>a_n$, per cui $\{a_n\}$ è monotòna crescente limitata superiormente: essa ammette limite che, per esclusione può essere solo $a=1$. Lascio al lettore la verifica che anche con $a_1>1$ è $[n\to\infty]\Rightarrow[a_n\to 1]$.

Tali esercizi possono essere risolti facilmente col metodo della iterazione grafica [fig. 1]: si disegnano nel piano cartesiano i grafici delle funzioni $y=x$ e $y=f(x)$: dato il valore iniziale a_1 si visualizza il valore $f(a_1)=a_2$ che, trasformato in ascissa per proiezione sulla bisettrice, dà luogo al valore $f(a_2)=a_3$ sul grafico di $y=f(x)$, e si procede finché si intuisce l'esito finale del procedere indefinito. Applichiamo il procedimento al caso citato $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$, $y=\sqrt{x}$ [fig.2].

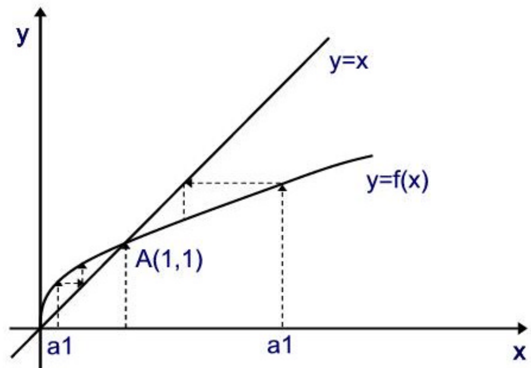


Fig. 2

Se è $a_1=0$, $f(0)=0$, 0 è punto fisso, $[n\to\infty]\Rightarrow[a_n\to 0]$; se è $a_1=1$ allora $f(1)=1$, A è punto fisso, $[n\to\infty]\Rightarrow[a_n\to 1]$. Se è $0<a_1<1$ l'iterazione fa convergere ad A ed è $[n\to\infty]\Rightarrow[a_n\to 1]$. Lo stesso si ha con $a_1>1$.

Bibliografia: E. Giusti, Esercizi e complementi di analisi matematica vol. I, Bollati Boringhieri, Torino, 1991.

Il fascino del calcolo matriciale: la rotazione rigida in S_3

di Arnaldo Vicentini

[1ª parte] Indichiamo con **I** la matrice identità, con $\mathbf{A}^T$ la trasposta di una matrice **A**, con **u** e **v** due vettori tridimensionali (rispettivamente rappresentati da $U=[\alpha, \beta, \gamma]^T$ e $V=[x, y, z]^T$), con $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ il prodotto vettoriale (rappresentato da $[\beta z-\gamma y, \gamma x-\alpha z, \alpha y-\beta x]^T$) e con $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ il prodotto scalare $\alpha x+\beta y+\gamma z$ – rappresentato da $\det(U^T V)$. Si può rappresentare $u\times v$ come $G_{\mathbf{u}}V$, dove $G_{\mathbf{u}}$ è una matrice quadrata dipendente da **u**. Infatti:

$$\begin{bmatrix} \beta z-\gamma y \\ \gamma x-\alpha z \\ \alpha y-\beta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Anche il vettore $\mathbf{v}_u=[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})/(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})]\mathbf{u}$, proiezione di **v** su **u**, è rappresentabile come prodotto P_uV con P_u matrice quadrata dipendente da **u**. Infatti:

$$\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma\\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

La (1) definisce G_u e la (2) definisce P_u. Sia ora **u** un versore, ossia $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. In tal caso abbiamo $v_u=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{v}_u=-\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, cioè $\mathbf{I}-P_u=-G_u^2$, (di immediata verifica). Si trova subito $P_u^2=P_u$, (da cui $G_u^4=-G_u^2$), $G_u^3=-G_u$ e, detta **N** la matrice nulla, $G_uP_u=P_uG_u=\mathbf{N}$, come si intuisce per essere v_u parallelo a **u** e **u** ortogonale a $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. P_u^n assomiglia a $\mathbf{I}^n$ e G_u^n a $(\sqrt{-1})^n$ poiché per ogni n naturale è:

$P_u^{n+1}=P_u$; $G_u^{2n+1}=(-1)^nG_u$; $G_u^{2(n+1)}=(-1)^nG_u^2$. (3)

Quale sarà la matrice quadrata $R_u(\varphi)$ che in S_3 rappresenta la rotazione dell'angolo φ attorno alla retta r per l'origine del riferimento orientata come **u** (nel verso dato dalla regola del cavatappi)? Sia **v'** il ruotato di **v** rappresentato da $V'=R_u(\varphi)V$. Pensato **v** somma di $\mathbf{v}_u$ parallelo a **u** e di $\mathbf{v}_n$, ortogonale a **u**, **v'** è la somma di $\mathbf{v}_u$ stesso e del ruotato $\mathbf{v}_n'$ di $\mathbf{v}_n=\mathbf{v}-\mathbf{v}_u$. Ora è $\mathbf{v}_n'=(\mathbf{v}-\mathbf{v}_u)\cos\varphi+(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\sin\varphi$. Pertanto:

$\mathbf{v}'=\mathbf{v}_u+(\mathbf{v}-\mathbf{v}_u)\cos\varphi+(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\sin\varphi$, (4)

ossia

$V'=P_uV+\cos\varphi\cdot(1-P_u)\cdot V+\sin\varphi\cdot G_u\cdot V$, (4bis)

In definitiva, ricordando che $\mathbf{I}-P_u=-G_u^2$:

$R_u(\varphi)=I+(1-\cos\varphi)\cdot G_u^2+\sin\varphi\cdot G_u=$ (5)

$$\begin{bmatrix}\alpha^2+(1-\alpha^2)\cdot\cos\varphi & \alpha\beta(1-\cos\varphi)-\gamma sin\varphi & \alpha\gamma(1-\cos\varphi)+\beta sin\varphi\\ \alpha\beta(1-\cos\varphi)+\gamma sin\varphi & \beta^2+(1-\beta^2)\cos\varphi & \beta\gamma(1-\cos\varphi)-\alpha sin\varphi\\ \alpha\gamma(1-\cos\varphi)-\beta sin\varphi & \beta\gamma(1-\cos\varphi)+\alpha sin\varphi & \gamma^2+\cos\varphi(1-\gamma^2)\end{bmatrix}$$

Per il suo significato geometrico $R_u(\varphi)$ rappresenta una isometria e siccome $R_u(\varphi_2)R_u(\varphi_1)V=R_u(\varphi_1+\varphi_2)V$, deve essere una matrice esponenziale in φ. Ma di ciò parleremo la prossima volta.

Formula di Vandermonde: una dimostrazione semplice

di Luciano Corso

La formula di Vandermonde si presenta nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{b}{k}\cdot\binom{n}{m-k}=\binom{b+n}{m} \qquad (6)$$

È noto a tutti che la (6) risulta assai pesante e noiosa da dimostrare. Si deve partire dall'identità:

$(1+x)^a\cdot(1+x)^b=(1+x)^{a+b}$

e dopo uno sviluppo barboso delle espressioni di sinistra e di destra della relazione di uguaglianza si arriva a identificare i coefficienti associati alle variabili con uguale esponente che stanno a destra e a sinistra dell'uguaglianza e attraverso l'identità, a generalizzare le uguaglianze dei coefficienti delle variabili con pari esponente.

La seguente dimostrazione, di tipo combinatorio e probabilistico, risulta elegante, semplice e immediata [B.1]. Consideriamo una scatola con *b* palline bianche e *n* palline nere. Estraiamo da essa *m* palline in blocco, ove $m \le b+n$, e cerchiamo di sapere quanti gruppi di *m* palline estratte ne contengono *k* di bianche. Ora, la probabilità di estrarre *m* palline dalla scatola, di cui *k* siano bianche, se l'estrazione avviene in blocco, è data da:

$$P(k)=\frac{\binom{b}{k}\cdot\binom{n}{m-k}}{\binom{b+n}{m}} \qquad (7)$$

Se questa è una probabilità (per costruzione lo dobbiamo credere), deve rispettare gli assiomi di probabilità, tra i quali anche quello di normalizzazione:

$$\sum_{k=0}^{m}P(k)=1.$$

Per cui possiamo anche scrivere:

$$\frac{\sum_{k=0}^{m}\binom{b}{n}\cdot\binom{n}{m-k}}{\binom{b+n}{m}}=1$$

relazione equivalente alla (6).

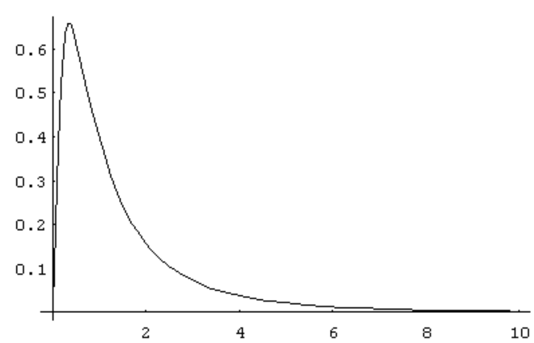
Bibliografia: [B.1] Mauro Cerasoli, "Esempi di dimostrazioni probabilistiche" - Lettera matematica – PRISTEM – n. 29 – pag. 38 e seguenti – settembre 1998 – Milano

Utilità o no, nella Scienza ?

di Luciano Corso

La Scienza è utilitaristica e la matematica, di tutte le Scienze, è la più utilitaristica: si tratta di mettersi d'accordo sul concetto di utilità..

Il concetto di utilità non ha un mero significato venale; esso – come insegna la logica economica, ma anche la razionalità matematica – ha un significato più ampio, che investe anche la sfera del pensare, del riflettere, del procedere correttamente, del sapere, dell'intelligenza. Il piacere di costruire una cosa bella, un teorema perfetto, un sistema di assiomi che funzioni bene, una dimostrazione esemplare rispondono a rigorosi requisiti di utilità. Non v'è comportamento umano che non si rifaccia in qualche modo all'utilità: uno studio astratto o immaginario che non abbia implicazioni utilitaristiche personali o sociali, alla fine è dannoso. Se non si risponde a un preciso intento utilitaristico, si sta male e dopo un po' si cede. L'utilità è profondamente legata al principio di selezione naturale e chi ha comportamenti non utilitaristici tende a essere emarginato. La stessa logica matematica è costruita su principi i cui fondamenti rispondono a norme di buon senso solo in quanto è il buon senso comune a garantire il rispetto di regole che siano utili a tutti (prima di tutto ai logici). La gratuità di un'azione non scalfisce minimamente il principio di utilità. Si possono fare delle cose perché si sente il bisogno di farle, indipendentemente dall'avere un tornaconto monetario: l'utilità in tal caso è data dalla soddisfazione personale di aver realizzato qualcosa di bello o di buono, o nel pensare che ciò che si è fatto sia utile per gli altri, porti del bene, soddisfi ad un nostro bisogno spirituale.



Funzione di densità di probabilità Lognormale

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\cdot I_{(0,\infty)}(x)$$

con parametri $\mu=0$ e $\sigma=1$.