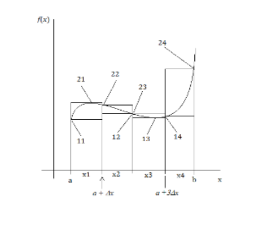
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 210 – Pubblicato il 04 – 03 – 2016



Elementi di Analisi Non Standard

A cura del gruppo NSA di Verona [*]

[*Segue dal numero* 207]

L'integrale

Uno dei problemi che l'integrazione vuole affrontare è quello di determinare l'area tra una curva, che è il grafico di una funzione continua f in un intervallo I, l'asse delle ascisse e due rette verticali per gli estremi a e b ($a < b$) di un intervallo chiuso contenuto in I sull'asse delle ascisse. Fissata la funzione f, tale area dipenderà dalla scelta degli estremi a e b dell'intervallo, ed è possibile indicarla come $A(a, b)$. Questa funzione binaria A ha due tipiche proprietà che potranno essere usate per determinarla. Esse sono: 1) la proprietà additiva, cioè se a, b e c appartengono all'intervallo I e $a < c < b$, allora $A(a, b) = A(a, c) + A(c, b)$, e 2) la proprietà rettangolare rispetto alla funzione f, cioè, per ogni a e b in I, $m\cdot(b - a) \le A(a, b) \le M\cdot(b - a)$, con m minimo delle funzione f in $[a, b]$ e M massimo delle funzione f in $[a, b]$. Detto altrimenti, la proprietà 1) afferma che se una superficie del tipo che si sta considerando viene divisa in due parti da una retta verticale, allora l'area totale è la somma delle aree delle due parti, e la 2) dice che l'area considerata è maggiore dell'area di un rettangolo di ugual base e altezza il minimo della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ e minore di un rettangolo con la stessa base e altezza il massimo della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. Si veda la Fig. 1.

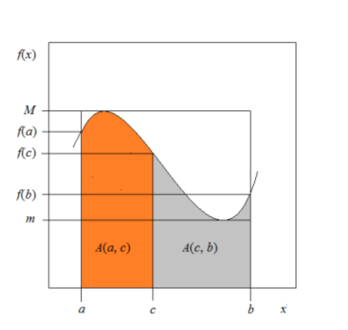


Fig. 1. Le proprietà additiva e rettangolare sono così formalizzate:

$A(a, b) = A(a, c) + A(c, b)$

$m\cdot(b - a) \le A(a, b) \le M\cdot(b - a)$

Seguendo l'approccio non standard al calcolo integrale, consideriamo una funzione continua f su un intervallo I cui appartengono i punti a e b, e una partizione dell'intervallo chiuso $[a, b]$ in sotto intervalli di uguale ampiezza Δ ($\Delta > 0$) separati dai punti: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_h \le b$ dove $x_i = x_0 + i\,\Delta$, $x_{i+1} - x_i = \Delta$ e h è il massimo numero naturale tale che $x_0 + h\cdot\Delta \le b$, e dunque $b - x_h \leqq \Delta$. Si veda la Fig. 2. Si può considerare la sommatoria

$$\left(\sum_{i=0}^{h-1} f(x_i)\cdot\Delta\right) + f(x_h)\cdot(b - x_h) \qquad (7)$$

che è l'area dell'unione dei rettangoli che hanno per base i segmenti $[x_i, x_{i+1}]$ (tutti di lunghezza Δ) e il segmento $[x_h, b]$ (di lunghezza minore di Δ) e altezza $f(x_i)$. Al diminuire della distanza Δ tra i punti di partizione l'area coperta da questa unione di rettangoli sarà sempre più vicina all'area cercata.

Per come è stata definita questa sommatoria dipende solo dagli estremi a e b e da Δ, essendo h e la successione degli x_i determinati dalle quantità indicate, sicché la denoteremo come

$$\sum_a^b f(x)\cdot\Delta\,,$$

che, fissati a e b, è una funzione reale unaria di Δ, chiamata somma di Riemann finita.

Nello spirito dei metodi non standard, questa funzione avrà un'estensione naturale, che può essere valutata anche per un infinitesimo positivo dx al posto di Δ. Allora il massimo numero H tale che $x_H \le b$ sarà un ipernaturale infinito ($x_H = x_0 + H\cdot dx$).

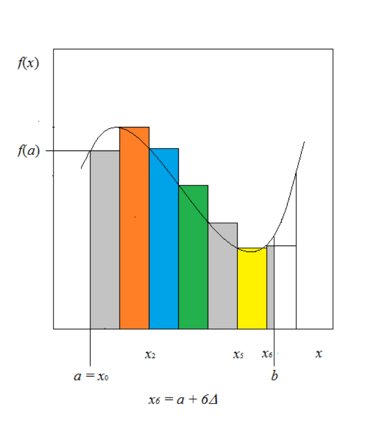


Fig. 2. Preso un Δ arbitrario l'unione degli intervalli $x_i - x_{i-1} = \Delta$, con i da 1 a h (*nel grafico* $h = 6$), occupa quasi tutto l'intervallo $[a, b]$ con una parte rimanente: $b - x_6 \le \Delta$. Si veda la (7).

Se la funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$, come si sta supponendo, ricordando che una funzione continua in un intervallo chiuso ha massimo e minimo, per la somma di Riemann finita si ha che

$$m\cdot(b-a) \le \sum_a^b f(x)\cdot\Delta \le M\cdot(b-a)\,, \qquad (8)$$

dove m è il minimo della funzione f in $[a, b]$, e M è il massimo della funzione f in $[a, b]$, sicché, per *transfer*, anche per la somma di Riemann infinita vale che

$$m\cdot(b-a) \le \sum_a^b f(x)\cdot dx \le M\cdot(b-a) \qquad (9)$$

e pertanto la sommatoria sarà un numero iperreale finito che così ha parte standard. Ciò ci permette di definire *l'integrale definito* di una funzione standard f continua su $[a, b]$ come

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = st\left(\sum_a^b f(x)\cdot dx\right). \qquad (10)$$

Se poi, partendo dalle disequazioni precedenti si passa alle parti standard, che preservano le disequazioni, poiché il primo e l'ultimo termine sono parti standard di se stessi in quanto reali, si ha:

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\cdot dx \le M\cdot(b-a)\,, \qquad (11)$$

e si è dimostrata la proprietà rettangolare per l'integrale.

Dalla definizione seguono le prime proprietà dell'integrale:

$$\int_a^a f(x)\cdot dx = 0\,;\ \int_a^b c\cdot dx = c\cdot(b-a)\,;$$

$$\int_a^b c\cdot f(x)\cdot dx = c\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx\,;$$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx + \int_a^b g(x)\cdot dx\,;$$

se $f(x) \le g(x)$ per ogni x in $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b g(x)\cdot dx.$$

Si definisce poi

$$\int_b^a f(x)\cdot dx = -\int_a^b f(x)\cdot dx \; .$$

Si vuole dimostrare ora che l'integrale è indipendente dalla scelta dell'infinitesimo non nullo dx. Cioè, anche se dx e du sono due diversi infinitesimi non nulli si ha:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^b f(u)\cdot du \; .$$

Poiché entrambi gli integrali sono numeri reali, per mostrare che coincidono basta far vedere che sono infinitamente vicini, cioè basta mostrare che per ogni reale positivo r,

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \le r + \int_a^b f(u)\cdot du \; .$$

Poiché r è un reale positivo lo si può dividere per $(b - a)$ e ottenere il reale positivo c tale che

$$r = c\cdot(b-a) = \int_a^b c\cdot dx$$

sicché la disuguaglianza precedente equivale a

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b \left(f(u)+c\right)\cdot du$$

per ogni reale positivo c. Questa affermazione sarà dimostrata per assurdo. Si supponga che

$$\int_a^b f(x)\cdot dx > \int_a^b \left(f(u)+c\right)\cdot du$$

per qualche reale positivo c; ipotizziamo, cioè, che esista un reale positivo c tale che

$$\sum\nolimits_a^b f(x)\cdot dx =$$

$$\left(\sum\nolimits_{i=0}^{H-1} f(x_i)\cdot dx\right) + \left(f(a+H\cdot dx)\cdot\left(b-(a+H\cdot dx)\right)\right) >$$

$$\left(\sum\nolimits_{j=0}^{K-1}\left(f(u_j)+c\right)\cdot du\right) + \left(\left(f(a+K\cdot du)+c\right)\cdot\left(b-(a+K\cdot du)\right)\right) =$$

$$\sum\nolimits_a^b \left(f(u)+c\right)\cdot du$$

(dove H è il massimo ipernaturale tale che $a + H\cdot dx < b$ e K è il massimo ipernaturale tale che $a + K\cdot du < b$) e, per il *transfer*,

$$\left(\sum\nolimits_{i=0}^{h-1} f(x_i)\cdot\Delta_x\right) + \left(f(a+h\cdot\Delta_x)\cdot\left(b-(a+h\cdot\Delta_x)\right)\right) >$$

$$\left(\sum\nolimits_{j=0}^{k-1}\left(f(u_j)+c\right)\cdot\Delta_u\right) + \left(\left(f(a+k\cdot\Delta_u)+c\right)\cdot\left(b-(a+k\cdot\Delta_u)\right)\right)$$

(dove h è il massimo naturale tale che $a + h\cdot\Delta_x < b$ e k è il massimo naturale tale che $a + k\cdot\Delta_u < b$).

Affinché ciò accada ci devono essere almeno due punti $\underline{x}$ e $\underline{u}$ tali che $\underline{x} - \Delta_u < \underline{u} < \underline{x} + \Delta_u$ e $f(\underline{x}) > (f(\underline{u}) + c)$, altrimenti i rettangoli della prima sommatoria sono tutti contenuti in quelli della seconda e questa non può essere minore. Tornando con il *transfer* all'ambiente non standard si ha che ci devono essere almeno due iperreali $\underline{x}$ e $\underline{u}$ tali che $\underline{x} - du < \underline{u} < \underline{x} + du$ e $f(\underline{x}) > (f(\underline{u}) + c)$; ma allora $\underline{u}$ e $\underline{x}$ sono infinitamente vicini, $\underline{u} \approx \underline{x}$ e, per la continuità, anche $f(\underline{x})$ e $f(\underline{u})$ devono essere infinitamente vicini, $f(\underline{x}) \approx f(\underline{u})$, contraddicendo la relazione $f(\underline{x}) - f(\underline{u}) > c$, con c reale positivo. Il che prova che l'integrale è indipendente dalla scelta dell'infinitesimo non nullo dx.

Il risultato ottenuto permette di giungere a mostrare che l'integrale ha la proprietà additiva.

Si deve mostrare che

$$\int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx \; .$$

Passando alle sommatorie

$$\sum\nolimits_a^c f(x)\cdot dx \,,\; \sum\nolimits_c^b f(x)\cdot dx \;\text{ e }\; \sum\nolimits_a^b f(x)\cdot dx \,,$$

e prendendo $dx = (b - a) / H$ con H ipernaturale infinito, i punti di ripartizione degli intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ coincidono con quelli dell'intervallo $[a, b]$, sicché la terza sommatoria è evidentemente la somma delle altre due. Passando alle loro parti standard, operazione che preserva l'addizione, si ottiene il risultato.

Finalmente si dimostra l'unicità della funzione binaria che soddisfa la proprietà additiva e la proprietà rettangolare rispetto alla funzione f. Iniziamo definendo le somme di Riemann finite superiore e inferiore. Queste si distinguono dalla somma di Riemann finita perché invece di considerare il fattore nei vari addendi che è il valore della funzione f nell'estremo sinistro del sottointervallo considerato, lo si sostituisce rispettivamente con il valore massimo e con il valore minimo della f, sempre nel sottointervallo considerato. Se $f_-(x_i)$ e ${}^{-}f(x_i)$ sono rispettivamente il minimo e il massimo della funzione f nel sottointervallo di estremi x_i e x_{i+1}, e Δ (con $\Delta = x_{i+1} - x_i$) è l'n-esima parte di $(b - a)$ (assunzione che non limita la generalità, come è stato giustificato), allora la somma di Riemann finita inferiore può essere denotata come

$$\sum\nolimits_{i=0}^{n-1} f_-(x_i)\cdot\Delta = \sum\nolimits_a^b f_-(x)\cdot\Delta \,,$$

e quella superiore come

$$\sum\nolimits_{i=0}^{n-1} {}^{-}f(x_i)\cdot\Delta = \sum\nolimits_a^b {}^{-}f(x)\cdot\Delta$$

con il significato dei simboli già precisato. Evidentemente

$$\sum\nolimits_a^b f_-(x)\cdot\Delta \le \sum\nolimits_a^b f(x)\cdot\Delta \le \sum\nolimits_a^b {}^{-}f(x)\cdot\Delta$$

ed è immediato (seguendo un percorso corrispondente a quanto già fatto) che anche le somme di Riemann superiore e inferiore hanno le proprietà rettangolari e additiva.

Passando alle loro estensioni naturali non standard risulta ancora

$$\sum\nolimits_a^b f_-(x)\cdot dx \le \sum\nolimits_a^b f(x)\cdot dx \le \sum\nolimits_a^b {}^{-}f(x)\cdot dx$$

e si mantengono le proprietà rettangolare e additiva. Inoltre, la differenza tra la somma di Riemann superiore e quella inferiore è un infinitesimo. Infatti, per ogni reale positivo r,

$$\sum\nolimits_a^b {}^{-}f(x)\cdot dx < \sum\nolimits_a^b f_-(x)\cdot dx + r \; .$$

Se per assurdo non fosse così, ci dovrebbero essere almeno un reale positivo r_0 e un punto $x_0 \in [a, b]$ tali che ${}^{-}f(x_0) \ge f_-(x_0) + r_0$, ma il minimo e il massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e di lunghezza infinitesima non possono che esser infinitamente vicini e quindi non distanti più di un reale, contraddizione che prova quanto si voleva asserire. Così

$$\int_a^b f_-(x)\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^b {}^{-}f(x)\cdot dx \; .$$

Ora si vuole mostrare che la funzione binaria che soddisfa le proprietà additiva e rettangolare rispetto alla funzione f continua nell'intervallo cui appartengono i punti a e b è unica. Allo scopo siano $A(a, b)$ e $B(a, b)$ due tali funzioni. Sia n un qualsiasi numero naturale e si divida l'intervallo $[a, b]$ in n parti. Per la proprietà additiva sia $A(a, b)$ che $B(a, b)$ sono le somme delle n parti in cui sono state divise. Ciascuna parte, per la proprietà rettangolare, è minore del rettangolo con la stessa base di quella parte e altezza il massimo della funzione f su quella base, e maggiore del rettangolo con la stessa base di quella parte e altezza il minimo della funzione f su quella base. Così, considerando le estensioni naturali agli iperreali, si ha sia

$$\sum\nolimits_a^b f_-(x)\cdot dx \le A(a,b) \,, \qquad \sum\nolimits_a^b f_-(x)\cdot dx \le B(a,b) \,,$$

sia

$$A(a,b) \le \sum\nolimits_a^b {}^{-}f(x)\cdot dx \,, \qquad B(a,b) \le \sum\nolimits_a^b {}^{-}f(x)\cdot dx \,,$$

e passando alle parti standard, si ottiene

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = A(a,b) = B(a,b) \,, \tag{12}$$

e l'unicità delle funzioni binarie che soddisfano sia le proprietà 1) che 2) è dimostrata.

Questo risultato è già di per sé di grande interesse in una scuola secondaria. [*Segue al numero* 211]

[*] Leonardo Aldegheri, Alberto Burato, Luciano Corso, Ruggero Ferro Bruno Stecca, Daniele Zambelli.