ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 211 – Pubblicato il 05 – 04 – 2016

Elementi di Analisi Non Standard

A cura del gruppo NSA di Verona [*]

[*Segue dal n.* 210]

Ora si vuole mostrare il teorema fondamentale del calcolo (la derivata della funzione integrale è la funzione integranda) sfruttando i metodi dell'analisi non standard, mettendo in luce la semplificazione che si ottiene, semplificazione che proviene già dalla più semplice e diretta nozione di integrale che non deve far ricorso a limiti al tendere a zero della lunghezza massima dei sottointervalli di partizione dell'intervallo $[a, b]$. Con i metodi non standard ci sono due dimostrazioni sostanzialmente diverse del teorema fondamentale del calcolo: una che parte dagli integrali indefiniti (dalle primitive) e l'altra che parte dalla derivazione della funzione integrale. Le vedremo entrambe. La prima richiede di premettere il teorema di unicità delle funzioni che hanno le proprietà 1) e 2) ricordate in precedenza relativamente a una funzione continua f in un intervallo I.

Sia allora $F(x)$ una funzione la cui derivata su un intervallo è $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. È facile vedere che se anche $G'(x) = f(x)$ su quell'intervallo, allora $F(x) - G(x) = k$ (una costante). Infatti, la funzione $F(x) - G(x)$ avrebbe derivata 0 su un intervallo e, per il teorema del valor medio, deve essere una costante. Ricordiamo che il teorema del valor medio è conseguenza del teorema di Rolle che si appoggia sul teorema dei valori estremi per funzioni continue in un intervallo chiuso, e questo è facilmente dimostrabile in analisi non standard. Si consideri ora la funzione $D(a, b) = F(b) - F(a)$. È evidente che soddisfa la proprietà additiva. Per il teorema del valor medio (le cui ipotesi sono rispettate), c'è un c tale che $a < c < b$ e

$$F(b) - F(a) = F'(c)\cdot(b - a) = f(c)\cdot(b - a)$$

da cui segue la proprietà rettangolare poiché $f(c)$ è minore del massimo della funzione f nell'intervallo e maggiore del minimo della funzione f nell'intervallo. Dunque, per l'unicità della funzione che soddisfa le condizioni 1) e 2) deve essere:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a)\,, \tag{13}$$

con F funzione che ha per derivata la funzione f. Poiché questa uguaglianza vale qualunque sia l'estremo superiore di integrazione in un intervallo dove la funzione f è continua, si ha che

$$\int_a^x f(x)\cdot dx = F(x) - F(a)$$

e la funzione $F(x) - F(a)$ viene chiamata funzione integrale. Così si è ottenuto quanto afferma il teorema fondamentale del calcolo.

Un altro approccio allo stesso teorema è il seguente.
Si voglia determinare la derivata della funzione integrale, che è

$$F(u) = \int_a^u f(x)\cdot dx\,,$$

usando i metodi non standard. Denotando sempre con F l'estensione naturale della funzione reale F, si avrà

$$F'(u) = st\Big(\big(F(u + du) - F(u)\big)\big/du\Big) =$$

$$st\left(\left(\int_a^{u+du} f(x)\cdot dx - \int_a^u f(x)\cdot dx\right)\Big/du\right)$$

che per l'arbitrarietà dell'incremento (l'incremento d'integrazione invece di essere dx può essere du) è uguale a

$$st\left(\left(\int_a^{u+du} f(x)\cdot du - \int_a^u f(x)\cdot du\right)\Big/du\right),$$

per l'additività degli integrali consideriamo che

$$st\left(\left(\int_u^{u+du} f(x)\cdot du\right)\Big/du\right) = st\big(f(u)\cdot du/du\big) = st\big(f(u)\big) = f(u)$$

essendo $f(u)$ un numero reale. La prima uguaglianza della riga precedente è giustificata dal fatto che, per definizione,

$$\int_u^{u+du} f(x)\cdot du \approx \sum\nolimits_u^{u+du} f(x)\cdot du = f(u)\cdot du\,.$$

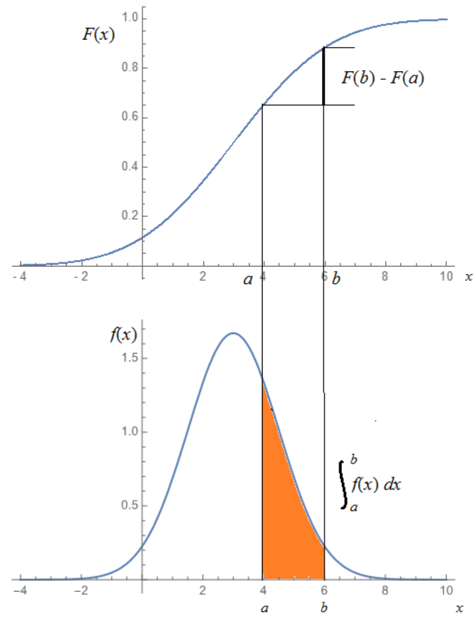

Fig. 3. Rappresentazione grafica del teorema fondamentale del calcolo integrale

Così si è visto che la derivata della funzione integrale è la funzione integranda, provando per altra via il teorema fondamentale del calcolo.

Volendo raggiungere l'espressione che consente di calcolare un integrale definito dai valori di una primitiva negli estremi di integrazione, ricordando ancora che le primitive di una funzione continua in un intervallo chiuso differiscono per una costante, si può osservare che

$$F(b) = \int_a^b f(x)\cdot dx = G(b) + k\,,$$

dove G è una qualsiasi primitiva di f e k dipende da G. Per determinare k, si osservi che

$$0 = \int_a^a f(x)\cdot dx = G(a) + k\,,$$

sicché deve essere $k = -G(a)$, e si ottiene nuovamente la classica relazione tra integrale definito e primitive della funzione integranda

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = G(b) - G(a)\,.$$

Si noti che questa seconda dimostrazione non ha dovuto far ricorso all'unicità della funzione binaria con le proprietà 1) e 2).

Inoltre la prima dimostrazione incorre nella difficoltà di spiegare come mai tra tutte le possibili funzioni d'area si sia scelta proprio quella determinata mediante una primitiva della funzione integranda. La seconda dimostrazione risponde immediatamente a questo interrogativo facendo emergere la risposta dalla ricerca, del tutto naturale, della derivata della funzione integrale.

Un commento: il teorema fondamentale del calcolo integrale non dipende dalla trattazione classica o non standard dell'argomento. L'integrale che abbiamo ottenuto, detto anche integrale definito, c'è per ogni funzione reale continua. Si dimostra facilmente, anche per funzioni continue a tratti o continue su intervalli illimitati; ma seguendo la definizione non si riesce a trovarne il valore dovendo prendere parti standard di somme infinite. Può essere approssimato mediante le somme di Riemann finite, ma il lavoro richiesto è enorme e spesso poco fattibile anche con i più avanzati strumenti di calcolo automatico.

Così la determinazione mediante le primitive può esser un ottimo modo per determinare il risultato. Ma anche in questo caso ci sono difficoltà. Non c'è un calcolo delle primitive. Data una funzione f, per trovarne una primitiva bisogna ricordare di avere incontrato f come derivata di una certa funzione. I metodi d'integrazione aiutano a modificare la situazione nella speranza di arrivare al punto di dover trovare primitive di funzioni che si ricorda di aver incontrato come derivate di altre funzioni. Ci sono poi funzioni continue le cui primitive (che esistono proprio per il teorema fondamentale del calcolo) non sono esprimibili con il linguaggio che descrive le funzioni, a volte lo sono come limiti di successioni di funzioni. Così, non essendoci un calcolo (metodo automatico, con precise regole sulla scrittura delle funzioni, che non richiede la conoscenza dei significati), la determinazione delle primitive è quasi una sfida aperta.

Riferimenti bibliografici: [B.1] Robinson A., *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1996. [B.2] Keisler H. J., *Elementary Calculus*, Weber & Schmidt, a division of Wadsworth Inc., Boston, 1982. [B.3] Goldoni G., *Il professor Apotema insegna…*, edito in proprio, Rolo (MO), 2011. [B.4] Sullivan K., *The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach* in The American Mathematical Monthly, Vol. 83, n. 5, 1976; disponibile su JStor, non gratuitamente. [B.5] Euler L., *Introductio in Analysin Infinitorum*, Losanna, 1748. [B.6] Tao T., *Ultrafilters and NonStandard Analysis*, in What's new-2007: Open questions, expository articles, and lectures series from a mathematical blog, 2008; disponibile on line all'indirizzo «terrytao.files.wordpress.com/2008/04/whatsnew-onlineversion1.pdf». [B.7] Deledicq A., *Teaching with infinitesimals* in Non Standard Analysis in Practice a cura di Diener F. e Diener M., Springer, Berlino, 1995. [B.8] Davis M., Hersh R., *L'analisi nonstandard* in Le Scienze n. 49, 1972. [B.9] O'Donovan R., Kimber J., *Non Standard Analysis at pre-university level. Naive Magnitude Analysis* on line all'indirizzo «http://www.ssrdm.ch/SSRDM/semin aires/NSA in school.pdf». [B.10] Crowell B., *Brief Calculus*, Light and Matter, Fullerton, 2014. [B.11] Robert A., *Non Standard Analysis*, Wiley, New York, 1988. [B.12] (a cura di) Arkeryd L. O., Cutland N., Ward Henson C., *Nonstandard Analysis. Theory and Applications*, Springer, New York, 1996. [B.13] Stroyan K. D., *Mathematical Background: Foundations of Infinitesimal Calculus*, disponibile online all'indirizzo «http:// homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/InfsmlCalculus/FoundInfsmlCalc.pdf».

[*] Leonardo Aldegheri, Alberto Burato, Luciano Corso, Ruggero Ferro Bruno Stecca, Daniele Zambelli.

Tra pentagoni ed esagoni su palle e palloni: varianti

Il problema proposto da Luciano Corso in MatematicaMente n. 208 induce due colleghi a dare le loro soluzioni: eccole.

Soluzione 1 (*di Marco Vincoli* [**]): Indichiamo con p ed e rispettivamente il numero di pentagoni e di esagoni. Dato che ogni spigolo congiunge due figure piane, il numero di spigoli del solido (o di cuciture del pallone) è

$$S = \frac{6e+5p}{2},$$

D'altra parte, i 5 lati di ogni pentagono sono congiunti a lati di esagoni, mentre dei 6 lati di ogni esagono, 3 sono congiunti a lati di pentagoni, 3 a lati di altri esagoni; gli spigoli pertanto sono $S = 5\,p + 3\,(e\,/\,2)$.

($e\,/\,2$ perché altrimenti i lati degli esagoni verrebbero contati due volte). Uguagliando le due espressioni

$$\frac{6e+5p}{2} = 5p + 3\frac{e}{2}$$

si ottiene $3\,e = 5\,p$, da cui $p = 12$. (*)

Rinunciando all'informazione $e = 20$, ci si può chiedere se esista un'altra copertura che rispetti lo stesso schema. Utilizzando la relazione di Eulero:

$$\mathrm{F + V = S + 2}$$

dove $F = e + p$, $V = 5\,p$ (ogni vertice del solido è vertice di uno e un solo pentagono), $S = 5\,p + 3\,(e\,/\,2)$, si ottiene $p = (e\,/\,2) + 2$. che, unito a (*), dà come unica soluzione $e = 20$, $p = 12$.

Soluzione 2 (*di Arnaldo Vicentini* [***]): Nelle figure 1 e 3 si vedono 6 facce pentagonali nella mezza superficie visibile. Ergo altre 6 stanno nella mezza superficie non visibile: 6 + 6 = 12.


Fig. 1

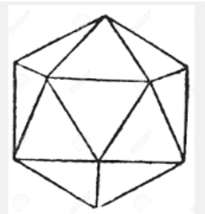
Fig. 2

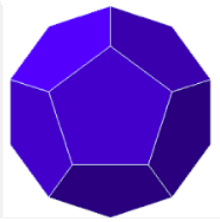
Fig 3

Icosaedro troncato significa che è asportata una piramidina da ogni vertice dell'icosaedro. I vertici dell'icosaedro sono 12 (come si possono contare in figura 2, che nasconde tre vertici posteriori rispettivamente opposti ai tre anteriori).

L'icosaedro regolare è il duale del dodecaedro (12 facce) regolare. Quindi il numero di vertici dell'icosaedro (cioè il numero di pentagoni del poliedro che gonfiato diventa il pallone da calcio) è uguale al numero di facce del dodecaedro (rappresentato in figura 3).

Ma non vi va bene partire dalla figura perché questa presuppone di avere già risolto tutto? Allora facciamo a meno delle figure 1, 2, 3 e ragioniamo!

Richiamiamo che in ogni triangolo sferico la somma degli angoli interni eccede π *rad* dell'angolo solido in *sr* (steradianti) sotto il quale il triangolo è visto dal centro della sfera (la cui superficie è vista sotto l'angolo solido di 4π *sr*).

Ogni angoloide di un poliedro regolare (= platonico) è "vestito" da un numero opportuno di angoli uguali e nel suo vertice concorrono altrettanti spigoli. Siccome $5\cdot\pi/3 < 2\cdot\pi$, si può pensare ad un poliedro regolare a facce triangolari ai vertici del quale concorrono 5 spigoli. Proiettando le facce sulla sfera circoscritta, ogni faccia viene proiettata su un triangolo sferico con angoli interni di $2\pi/5\cdot rad$. La somma dei tre angoli è $6\pi/5\cdot rad$ ed eccede π *rad* di $\pi/5$ *rad*. L'angolo solido al centro è dunque $\pi/5$ *sr* e pertanto questo poliedro ha $(4\pi)/(\pi/5) = 20$ facce (icosaedro rappunto).

Ogni spigolo è lato di facce adiacenti. Quindi il numero di spigoli è (20·3) / 2 = 30. In ogni vertice concorrono 5 spigoli. Quindi il numero di vertici è (20·3) / 5 = 12. Asportiamo da ognuno dei 12 vertici d'un icosaedro una piramidina [pentagonale] con spigoli laterali lunghi un terzo degli spigoli dell'icosaedro. Otteniamo quel poliedro di 32 facce (20 esagonali e 12 pentagonali). Ogni spigolo appartiene a due facce e quindi il numero di spigoli è (20·6 + 12·5) / 2 = 90. In ogni vertice concorrono tre spigoli e quindi il numero di vertici è (20·6 + 12·5) / 3 = 60. Sappiamo che in ogni poliedro, detto F il numero di facce, V il numero di vertici e S il numero di spigoli, secondo una celebre formula dovuta ad Eulero risulta $F + V = S + 2$. Nel nostro caso (F= 32, V = 60 e S = 90) abbiamo appunto: 32 + 60 = 90 + 2.

[**] Liceo Scientifico G. Galilei Verona - e-mail: rete@galileivr.it
[***] Cultore di matematica di Verona - e-mail: arnavic@alice.it