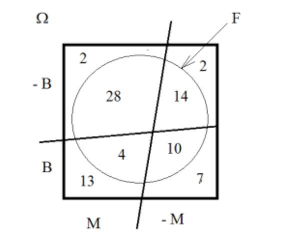
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 212 – Pubblicato il 04 – 05 – 2016



Spunti sui *numeri favorevoli* [1]

di Gabriele Lucchini [2]

Chiamo "favorevoli" (rispetto a singoli quesiti) quei numeri che consentono risoluzioni o trattazioni particolari di problemi, nel senso che risulta dagli esempi.

La sollecitazione a pensare a "numeri favorevoli" mi è venuta leggendo, nelle *Riflessioni* di Michele Pellerey [3] su *Le competenze - Che cosa sono* [4], le considerazioni sul problema [5] sotto riportato.

Trasformare la figura seguente [*Fig. 1*] *disegnata su un quadrettato e avente la forma di croce in un quadrato che abbia la stessa area.*

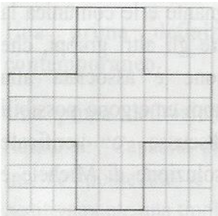


Fig. 1

Invito a osservare la duplice suddivisione in quadrati e i numeri di quadretti del quadrato grande e della croce: suggeriscono qualcosa? L'avere 81 quadretti è di aiuto?

M. Pellerey sviluppa la trattazione del quesito come «un caso concreto di processo di soluzione di problemi» al quale ha assistito in una quinta elementare, con lavoro a gruppi in maniera autonoma, ma non dice come uno dei fanciulli (Michele) è arrivato alla soluzione e come la ha illustrata agli altri.

Per inciso, osservo che a me interesserebbe molto sapere che cosa avrebbe fatto l'insegnante se nessun alunno avesse trovato una strada: come avrebbe sfruttato la situazione per mostrare uno o più modi per affrontare il problema? [6]. E mi piacerebbe poter sapere che cosa farebbero i lettori, quali stimoli offrirebbero, se sfrutterebbero il fatto che l'area della croce è 45 quadretti degli 81 del quadrato grande (5 dei 9 di quelli 3×3), se penserebbero ad alunni in grado di servirsi del teorema di Pitagora, se penserebbero ad altri spunti suggeriti dalla soluzione di M. Pellerey riprodotta in Fig. 2 e, in particolare, all'uso di vertici della croce.

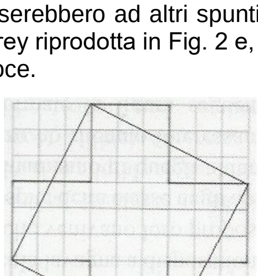


Fig. 2

Ritengo che i lettori abbiano notato che il poter usare vertici della quadrettatura è legato al fatto che nel triangolo rettangolo in basso a sinistra (e negli analoghi) le misure dei cateti sono "favorevoli" per la risolubilità del problema, anche se la misura della lunghezza dell'ipotenusa non è un numero naturale: $\sqrt{5} = \sqrt{(1^2 + 2^2)}$ e in quadretti $\sqrt{45} = \sqrt{(3^2 + 6^2)}$, con evidenti collegamenti alla forma della croce inserita nel quadrato (che il Vocabolario Treccani indica come "croce greca o quadrata con quattro bracci uguali" e uguali, anche, al quadrato centrale).

Pensando di orlare la croce sul bordo della figura con un quadrato 3x3 su ciascuno dei 4 lati e di ripetere questa operazione, si ottengono successivamente (dopo quella iniziale di 5 = 1 + 4 quadrati) croci di 9 = 3 × 3, 13 = 4 + 9, 17 = 1 + 16, 21, 25 = 5 × 5, … quadrati; la successione può essere scritta $x_{n+1} = x_n + 4$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $x_1 = 5$.

Ovviamente, si può pensare di passare a croci col braccio verticale più lungo di quello orizzontale, che va collocato sopra la metà del primo (croci latine), cominciando con l'aggiungere in basso un quadrato 3 × 3 quadretti (croce di 54 quadretti in un rettangolo di 108 o di 6 quadrati in un rettangolo di 12).

Un altro esempio significativo di numeri "favorevoli" è quello che Giuseppe Peano [7] ha proposto nel modo seguente [8]:

«Un Arabo morendo lasciò ai suoi tre figli 17 cammelli in eredità e ordinò che la metà di essi fosse data al primo figlio, la terza parte al secondo, e la nona al terzo figlio. I tre figli si rivolsero per la divisione al cadì, il quale venne con il proprio cammello, che unì agli altri. Diede la metà dei 18 cammelli, cioè 9 al primo, un terzo, cioè 6 al secondo, un nono, cioè 2 al terzo figlio, e poi, ripreso il suo cammello, se ne andò ringraziato dai tre figli, ognuno dei quali aveva ricevuto più di quanto gli spettava. Spiegare l'enigma. RISPOSTA: Infatti, 1/2 + 1/3 + 1/9 < 1, cioè quel padre non distribuì tutta l'eredità.».

Ovviamente, nel proporre il problema ad alunni può essere utile indicare l'importanza del 17 aggiungendo che è

$1/2 + 1/3 + 1/9 = (9 + 6 + 2) / 18 = 17/18$ [9].

Ritengo che risulti evidente l'opportunità della segnalazione della peculiarità di dati e situazioni nell'usare numeri "favorevoli", in particolare per evitare di lasciar pensare (sia pure ingenuamente ed erroneamente) che il procedimento utilizzato sia di validità generale, anche quando non lo è.

In questo ordine di idee è ben noto che non tutte le terne di numeri naturali non nulli sono *terne pitagoriche* e non pare necessario soffermarsi sull'argomento, anche se ricco di fascino, interesse e suggestioni: accenno soltanto alla possibilità di considerare la costruibilità di segmenti a lunghezza intera sul geopiano [10].

Mi pare, invece, opportuno proporre un altro esempio per richiamate l'attenzione sulla convenienza della segnalazione, nel senso predetto, di peculiarità di dati e situazioni, anche perché mi è capitato di constatarne l'omissione in libri di testo (e di trovare in internet altre "amenità" su questo problema).

L'esempio è quello della ricerca del rettangolo di area massima tra quelli isoperimetrici, ovviamente comprendendo il quadrato tra i rettangoli [11]: è evidente che, dando valori per il perimetro, la determinazione dei lati e la costruzione di figure possono essere "favorite" da particolari valori numerici.

Se, per presentare la questione prendiamo come perimetro 24 (non importa in quale unità di misura), possiamo considerare le coppie di lati a misura intera (che possiamo elencare: 1 e 11, 2 e 10, 3 e 9, 4 e 8, 5 e 7, 6 e 6), ma anche non limitarci a queste passando a razionali o irrazionali (che non possiamo elencare); facendo una rappresentazione nel primo quadrante di un sistema cartesiano ortogonale monometrico (Fig. 3), il luogo dei quarti vertici è il segmento di estremi R=(12, 0) e S = (0, 12) [12].

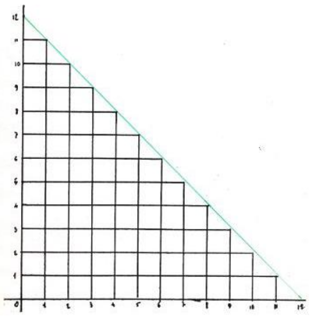


Fig. 3

Si può, quindi, riflettere sul fatto che gli esempi devono essere scelti bene o essere abbastanza numerosi per non indurre a conclusioni sbagliate, come sull'esempio sarebbe quella di pensare che la soluzione sia *sempre* tra i rettangoli a lati con lunghezza intera [13].

Come ultimo esempio, in Fig. 4 propongo l'individuazione di lati di 21 quadrati, che consentono la costruzione di un quadrato 112 × 112 [14].

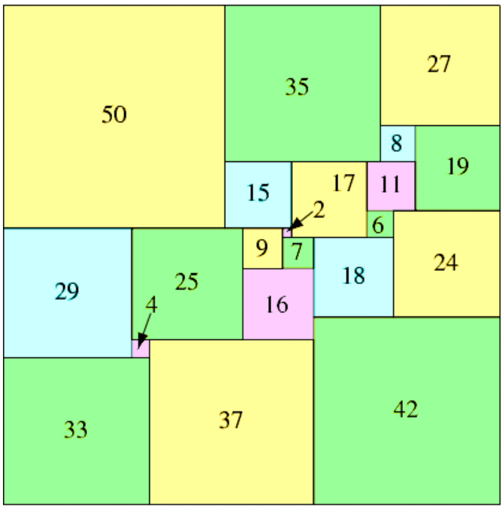


Fig. 4

Concludo esprimendo apprezzamento e rivolgendo un ringraziamento a chi ha individuato, costruito, fatto conoscere numeri "favorevoli".

[1] In http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/rp-numfa.htm sono inseriti complementi e *link*.
[2] Già docente dell'Università degli Studi di Milano.
E-mail: gabriele.lucchini@unimi.it.
Pagine *internet*: http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/gabl00.htm.
[3] Informazioni su Michele Pellerey sono reperibili in internet.
[4] *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 38 A-B n. 5, novembre-dicembre 2015, pp. 517-534 (Atti del XLIV Seminario nazionale del Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin su "Sviluppare competenze insegnando matematica. Diventare competenti facendo matematica", agosto 2015).
[5] Non ho ritrovato trattazioni precedenti, che ritengo di avere visto: sarò grato a chi me ne segnalerà; comunque, non ricordo di averlo considerato dal punto di vista numerico.
[6] Nel *file* indicato in nota 1 è inserito un *link* a una mia lettera (pubblicata) su "Osservare e insegnare".
[7] Ho citato Giuseppe Peano nel n. 209 di *MatematicaMente*.
[8] È il problema capzioso n. 18 del libro citato nel predetto N. 209. Problemi analoghi sono segnalati nel *file* indicato in nota 1 (G. Peano).
[9] Seguendo G. Peano si può trascurare che è 17 / 18 = 0,9444…
[10] Sulla spirale di Teodoro v. *MatematicaMente* n. 201 (Figura 6); sul geopiano v. *MatematicaMente* n. 202 (Figure 10-13).
[11] Nella definizione XXII del libro I degli *Elementi* di Euclide si legge: «*Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera e ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti ma non è equilatera*, […]» (ristampa 1988 della edizione italiana 1970 a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, UTET): penso che non occorra soffermarsi sulla importanza del passaggio alla classificazione insiemistica.
[12] Gli estremi possono essere visti come casi limite.
[13] Chiamando $2p$ il perimetro, x e y le lunghezze dei lati si ha che è $x + y = p$ e che l'area può essere scritta $A = xy$; volendo cercare il massimo di xy con il vincolo $x + y = p$, ricorriamo a un semplice artificio: essendo $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2 = p^2 - (x - y)^2$,
xy è massimo per $x - y = 0$, cioè per il quadrato di lato $x = y = p / 2$.
[14] Ho preso la figura dal problema 59 (Ruziewicz) nel sito http://utenti.quipo.it / base5/scottishbook/scottishbook.htm.

Un problema di geometria

di Marcello Pedone [*]

Propongo il seguente problema ai lettori di MatematicaMente: considerato il quadrato ABCD di lato AB = l, costruire il quadrato EFGH ottenuto congiungendo i punti medi dei lati del quadrato ABCD e il quadrato KLMN ottenuto congiungendo i punti medi dei lati del quadrato EFGH. Dimostrare, quindi, che la conica passante per i punti:

1. KFLMHN è un'***ellisse***,
2. BNEKA è una ***parabola***,
3. DKNCG è un'***iperbole***,
4. ABHNKF è una ***circonferenza***.

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrici, con l'origine nel centro del quadrato, scrivere le equazioni dell'ellisse, della parabola, della circonferenza e dell'iperbole (Fig.5).

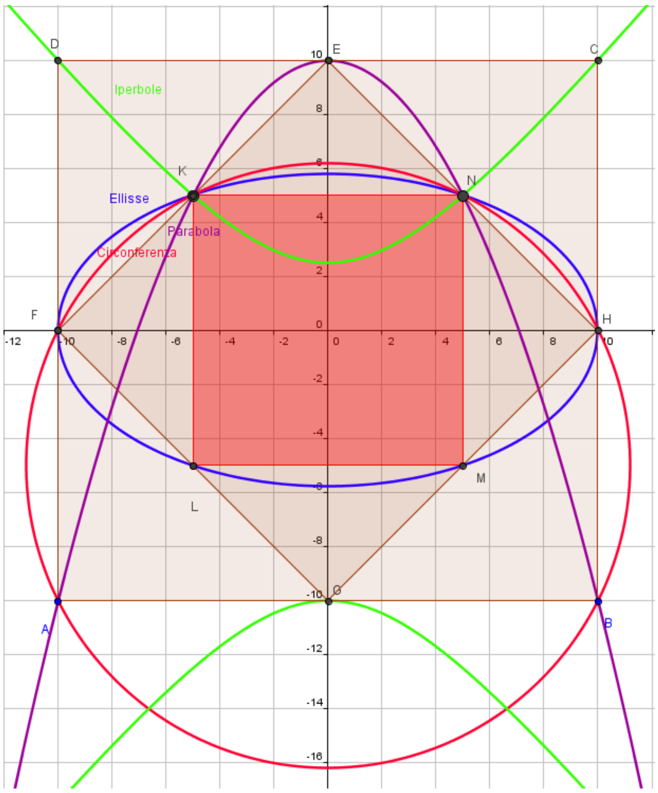


Figura 5 (grafico di Marcello Pedone)

[*] Presidente della sezione di Lecce della Mathesis
e-mail: marcellopedone@tin.it

Analisi non Standard: Atti del 5° convegno nazionale

Sono disponibili gli Atti del 5° Convegno nazionale di Analisi non Standard. Il convegno si è svolto a Verona il 10 ottobre del 2015. Chi fosse interessato ad averli occorre che li chieda alla casa editrice che ha curato l'edizione. L'indirizzo è:
Matematicamente.it s.r.l.
Corso Umberto 39
73010 San Donato di Lecce (LE)
Fax 069 2912984 – Cell. 333 5751100
Sito web: www.matematicamente .it