ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 213 – Pubblicato il 08 – 06 – 2016

Spunti sul *costo dei vincoli* [1]

di Gabriele Lucchini [2]

Per chiarire il senso del titolo di questo articolo, propongo subito un quesito per il ben noto problema di traghettamento di "lupo, capra e cavoli" (che, comunque, enuncerò tra poco): oltre a richiedere una ricerca più laboriosa, i vincoli comportano un numero di traversate maggiore di quello necessario in loro assenza?

In varie trattazioni è presentata una soluzione, abitualmente come se fosse l'unica, e in alcune è posta – appunto – la questione della unicità, ma non ho mai trovato una riflessione sul predetto "costo" dei vincoli, e l'osservazione vale anche per altri problemi o situazioni (che prendano la forma di problema); ovviamente, una volta suggeritane la considerazione, la risposta è ovvia, ma pare interessante invitare a esplicitarla anche come stimolo più generale, nel senso che vedremo con gli esempi sulla programmazione lineare e su "giromilano".

Una esperienza interessante è quella di chiedere a risolutori del problema quante traversate in più devono essere fatte rispetto a quelle in assenza di vincoli, se la soluzione è unica e se hanno conoscenze di riferimenti storici significativi alla questione.

In relazione a questa ultima domanda è opportuno ricordare che la più antica tra le trattazioni scritte del problema pervenuteci è, secondo quanto viene riferito dagli storici, quella di Alcuino di York (735-804) nelle *Propositiones ad acuendos juvenes* [3]. Riporto la traduzione di enunciato e soluzione dal libro *Alcuino di York – Giochi matematici alla corte di Carlomagno – Problemi per rendere acuta la mente dei giovani* a cura di Raffaella Franci [4].

Il lupo, la capra, il cavolo

Un uomo doveva trasportare aldilà di un fiume un lupo, una capra e un cavolo e non poté trovare altra barca se non una che era in grado di portare soltanto due di essi. Gli era stato ordinato però di trasportare tutte queste cose di là senza alcun danno. Chi è in grado dica in che modo poté trasferirli indenni.

Soluzione: […] *io dapprima porterei la capra e lascerei il lupo e il cavolo. Poi tornerei e trasferirei sull'altra riva il lupo e sbarcato questo e imbarcata di nuovo la capra ritornerei indietro, e lasciata la capra trasferirei di là il cavolo, e tornerei di nuovo indietro, e presa la capra la porterei sull'altra sponda. In questo modo, la traversata sarà tranquilla senza disastri che incombano.*

Ricordato che R. Franci commenta il problema su aspetti storici e di unicità della soluzione [5], propongo in Tabella 1 una visualizzazione delle situazioni su rive e barca, con notazioni ovvie a parte la *v* per "verzi" al posto di cavolo (con la terminologia che vedremo usata da Niccolò Tartaglia [6]), lasciando la *c* per capra. Si noti che al secondo traghettamento può essere trasportato il cavolo, con conseguenti aggiustamenti.

riva 1	barca >>>	<<< barca	riva 2
l v	*u c*		-
l v		*u*	*c*
v	*u l*		*c*
v		*u c*	*l*
c	*u v*		*l*
c		*u*	*l v*
-	*u c*		*l v*

Tabella 1

Aggiungo, anche, la conclusione della trattazione di Niccolò Tartaglia (1499 circa - 1557) nel *General Trattato di Numeri et misure* (1556) [7]: «*cosi hai fatta la ragione, e da questa è nasciuto un certo proverbio fra gli huomini, dicendo in qualche proposito, egli ha salvato la capra e li verzi.*» (problema n. 141 del libro XVI [8]). Per vari aspetti analogo, ma interessante anche per successive varianti ai vincoli sulla gelosia e loro implicazioni e per considerazioni relative alla trattazione su quattro coppie, è il problema precedente nelle *Propositiones*.

Tre fratelli che avevano una sorella

C'erano tre fratelli che avevano ciascuno una sorella e dovevano attraversare un fiume. Ciascuno di essi desiderava la sorella degli altri. Arrivati ad un fiume non trovarono altro che una piccola barca che poteva trasportare solo due di essi. Dica chi può in che modo attraversarono il fiume, in modo che nessuna di esse fosse oltraggiata.

Soluzione: *In primo luogo io e mia sorella entrammo nella barca e ci trasferimmo dall'altra parte, attraversato il fiume feci scendere la sorella dalla barca e riportai la barca all'altra riva. Poi si imbarcarono le sorelle dei due uomini, cioè dei due che erano rimasti a riva. Quando quelle femmine furono sbarcate, mia sorella che aveva fatto la traversata per prima, mi riportò la barca. Una volta sbarcata entrarono nella barca i due fratelli e andarono sull'altra riva. Allora uno di essi con sua sorella entrò nella barca e ritornò da noi. lo poi e quello che aveva navigato attraversammo lasciando a terra la mia sorella. Raggiunta noi la riva, una delle due sorelle ricondusse la barca indietro e presa con sé mia sorella di nuovo venne da noi. E quello la cui sorella era rimasta di là entrò nella barca e la riportò con sé. E fu completata la traversata senza alcun disonore.*

A questo problema R. Franci dedica non soltanto un breve commento nel testo, ma anche una appendice di 9 pagine [8].

Le accennate varianti sul modo di considerare la gelosia hanno due aspetti: quello del passaggio da fratelli e sorelle a mariti e mogli e quello del considerare gelose anche le mogli, con implicazioni nella predetta estensione a quattro coppie.

Nel predetto *General trattato* (problema n. 142 del libro XVI) si legge: «*Sono 3 belli gioveni freschi e gagliardi, i quali hanno 3 belle damigelle per mogliere, e sono gelosi tutti, cosi le moglier delli mariti, come li mariti delle moglier.*».

Propongo in tabella 2 una visualizzazione analoga alla precedente della soluzione di N. Tartaglia, indicando con Aa, Bb, Cc le tre coppie, con maiuscole per gli uomini e minuscole per le donne.

riva 1	barca >>>	<<< barca	riva 2
A B C a	b c		-
A B C a		b	c
A B C	a b		c
A B C		c	a b
C c	A B		a b
C c		A a	B b
a c	A C		B b
a c		b	A B C
c	a b		A B C
c		a	A B C b
-	a c		A B C b

Tabella 2

Si noti che nel ritorno "Aa" non è utilizzata la gelosia delle donne, che in varie traversate la scelta non è unica e che utilizzando la gelosia delle donne i vincoli condizionano le scelte, ma non hanno costo in termini di numero di viaggi.

La valutazione del numero di soluzioni è lasciata al lettore. Sull'ampliamento a quattro coppie rimando al testo citato in nota 5, limitandomi a riportare che la risoluzione «*ha dato luogo a erronee contestazioni perché alcuni, come* C. G. *Bachet e I. Ghersi, considerando gelosi solo i mariti, hanno riconosciuto impossibile il problema di traghettare quattro coppie*» e che «*queste erronee contestazioni possono forse essere collegate al fatto che la soluzione di Tartaglia al problema relativo a tre coppie non utilizza l'ipotesi della gelosia delle mogli*». Questa contestazione è stata poi condivisa da R. Franci nel libro citato (con riferimento a C. G. Bachet).

Segnalo che nel libro *La matematica dell'uomo della strada nel problema delle scelte* a cura di Vittorio Checcucci [9] è considerata una versione su due coppie, con donne che non remano, in particolare per una trattazione con circuiti elettrici.

Per l'esempio successivo utilizzo un film didattico, che considero tra i più belli che abbia avuto occasione di vedere, *Linear programming* della Halas and Batchelor Cartoon Films [10].
Il film introduce alla programmazione lineare con il seguente problema: rendere massimo il profitto del trasporto di un carico di scatole rosse e di scatole blu (senza limitazioni di disponibilità) con dati e vincoli di tabella 3 [11].

	Peso	Volume	Profitto
Scatole rosse	8 x	6 x	6 x
Scatole blu	25 y	2 y	5 y
Vincoli	≤ 1200	≤ 216	

Tabella 3: x e y sono rispettivamente il numero di scatole rosse e blu.

Nel film un uomo deve caricare scatole su un carretto e naturalmente vuole massimizzare il profitto del trasporto. L'uomo fa alcuni tentativi senza tenere conto dei vincoli di peso e volume e viene così richiamato a rispettarli dal cavallo, che dovrà trainare il carretto. È il cavallo che gli mostra infine il modo di risolvere il problema, concludendo che è solo "*simple horse sense*" (semplice buon senso di cavallo).

Dette x e y le quantità dei due tipi di scatola, il problema può essere matematizzato nella forma
massimo di $f(x, y) = 6x + 5y$
con i vincoli delle limitazioni, oltre a quelli, ovvi, di non negatività delle incognite:

$$\begin{cases} 8x + 25y \leq 1200 \\ 6x + 2y \leq 216 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Rappresentando le limitazioni con le equazioni
$8x+25y= 1200 \quad (\sigma)$
$6x+ 2y= 216 \quad (\tau)$,
si ha che i punti che soddisfano le quattro condizioni sono quelli del quadrilatero tratteggiato di figura 1.

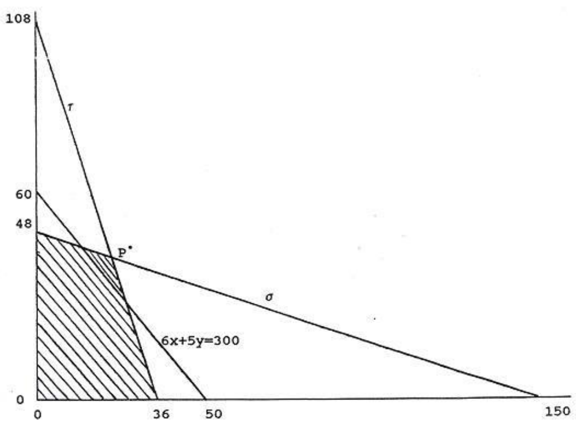

Figura 1

La retta $6x+5y=300$ di figura 1 è una delle rette della famiglia $6x+5y=k$: il valore massimo di k compatibile con i vincoli corrisponde alla retta passante per P°: i conti portano ad attribuire a questo punto le coordinate
$x_0=1500/67=22,38...$ e $y_0=2736/67= 40,83...$;
se si ammette che i numeri di scatole debbano essere interi, questa soluzione non è accettabile e si deve passare a $x_1=23$ e $y_1=39$, con profitto 333, peso 1159, volume 216 [12].

Si noti che considerando un solo vincolo si avrebbe per il peso 150 scatole rosse con profitto 900 (con volume 900>216) e per il volume 108 scatole blu con profitto 540 (con peso 1620>1200): invito a osservare che il costo dei vincoli è, qui, dato dalla limitazione al profitto e che c'è anche il vincolo implicito dei numeri interi di scatole, che dà un complemento che è un utile richiamo a questa eventualità.

L'ultimo esempio che considero è quello di "calcolo percorso" di "giromilano" della ATM-Milano, che offre le opzioni di tabella 4 [13].

CON	*a*) *tutti i mezzi pubblici*, c) *esclusi metro e treni*,	*b*) *solo metro*, *d*) *solo metro e treni*;
E	*p*) *il più veloce*, *r*) *pochi trasbordi*.	*q*) *pochi tratti a piedi*,

Tabella 4

Indicando con "?" la durata dei viaggi, come nella tabella 5, si potrebbero confrontare, per le soluzioni proposte dal programma tra le dodici teoricamente possibili, i costi dei vincoli in termini di tempi.

	a	*b*	*c*	*d*
p	?	?	?	?
q	?	?	?	?
r	?	?	?	?

Tabella 5

Discorso analogo si può fare su altri "calcoli di percorso" (ATAC-Roma, …) e, ovviamente, possono essere fatti confronti e riflessioni su opzioni e presentazione dei risultati [14].

Concludo invitando il lettore a riflettere sui costi della scelta di riga e compasso euclidei per la Geometria e a inviarmi segnalazioni su spunti qui non considerati.

[1] In http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/rp-vincl.htm sono inseriti complementi e *link*. Nel seguito indicherò rimandi a questo *file*.
[2] Già docente dell'Università degli Studi di Milano.
E-mail: gabriele.lucchini@unimi.it.
Pagine *internet*: http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/gabl00.htm.
[3] Per informazioni su Alcuino di York, sul libro e sul problema segnalo in particolare un documento di Raffaella Franci al link
http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegnostoria2/materiali/franci.pdf.
Altri scritti di R. Franci sono segnalati nella bibliografia del suo libro poi citato.
[4] Pisa, ETS, 2005, 144 pagine. Indice e altri dati sul libro sono segnalati nel *file* citato in nota 1.
[5] Indicazioni sono segnalate nel *file* citato in nota 1.
[6] Segnalo che N. Tartaglia è uno degli autori considerati nel libro di C. F. Manara e G. Lucchini M*omenti del pensiero matematico* liberamente fruibile in internet (v. *file* citato in nota 1).
[7] Il testo è riportato nel libro segnalato in nota 5.
[8] Indicazioni sono segnalate nel *file citato* in nota 1.
[9] Firenze, Libreria Editrice Fiorentina, 1972, 96 pagine; indicazioni sono segnalate nel *file* citato in nota 1.
[10] Indicazioni sono segnalate nel *file* citato in nota 1. Uno dei film della serie è fruibile in youtube, cercando *Flow diagram* (1965).
[11] Su peso e massa non mi pare necessario soffermarsi.
[12] Oltre a questo metodo di risoluzione, che utilizza semplici nozioni di Geometria analitica, può essere utilizzato il metodo chiamato *algoritmo del simplesso* e possono essere utilizzati pacchetti applicativi per *personal computer*, nei quali immettere i dati e indicare il tipo di soluzione voluta (a numeri interi, eventuale numero di cifre dopo la virgola) per avere direttamente il risultato.
La programmazione lineare è già stata considerata in *MatematicaMente* e in attività della Mathesis di Verona e riferimenti sono in internet.
[13] Dati al 14 dicembre 2015. Si tenga presente che a Milano c'è anche il cosiddetto "passante ferroviario".
[14] Problemi tecnici e confronti tra realizzazioni del servizio in diverse città esulano dagli obiettivi di questi spunti.