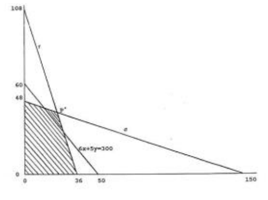
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 214 – Pubblicato il 01 - 07 - 2016



Le catene di Markov applicate a un problema della Scuola Normale di Pisa

di Massimo Fioroni [*] e Daniele Nemmi [**]

Introduzione

Ci vogliamo occupare di un problema che è stato proposto nel concorso di ammissione al I anno del corso ordinario della Scuola Normale Superiore di Pisa, Prova di Matematica per i corsi di laurea in Matematica, Fisica, Informatica, anno accademico 2015-2016.

La soluzione proposta in questo articolo è alternativa a quella presente nel sito ufficiale della Scuola, basata sulla ricorsione. Si propone l'utilizzo delle catene di Markov. Le catene di Markov non rientrano negli argomenti previsti dalle Indicazioni Nazionali per i Licei, ma spesso sono affrontate nei percorsi di approfondimento degli studenti nell'ambito delle Olimpiadi della matematica.

Le potenzialità sono ben note e tra i vari aspetti significativi vi è la possibilità di mettere in relazione fenomeni stocastici, grafi e matrici. Le difficoltà tecniche della soluzione proposta sono molto contenute specie se ci si avvale di un ambiente di calcolo simbolico, di cui esistono diverse versioni tra le quali alcune si possono utilizzare gratuitamente. Pertanto è bene sottolineare che una tale soluzione in una prova di concorso nella quale non ci si può avvalere di ausili per il calcolo delle matrici risulterebbe più onerosa rispetto alla ricorsione. Nelle Indicazioni Nazionali per i Licei, in particolare tra gli Obiettivi specifici di apprendimento di matematica per il primo biennio dello scientifico, si può leggere: "*…(lo studente) studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica.*"

Sempre riferendoci alle medesime Indicazioni Nazionali per la Fisica al quinto anno: "*L'insegnante dovrà prestare attenzione a utilizzare un formalismo matematico accessibile agli studenti, ponendo sempre in evidenza i concetti fondanti… L'evidenza sperimentale della natura ondulatoria della materia, postulata da De Broglie, ed il principio di indeterminazione potrebbero concludere il percorso in modo significativo. In quest'ambito, lo studente potrà approfondire tematiche di suo interesse, accostandosi alle scoperte più recenti della Fisica (per esempio nel campo dell'astrofisica e della cosmologia, o nel campo della Fisica delle particelle) o approfondendo i rapporti tra scienza e tecnologia.*".

Si pone pertanto al quinto anno il problema di affrontare in Fisica tematiche che richiedono un formalismo molto impegnativo. In particolare la meccanica quantistica può essere discussa evidenziando i risultati più significativi e focalizzando l'attenzione sul relativo sviluppo storico, ma tutto ciò non esclude la possibilità di rendere consapevoli gli studenti di quale siano le tecniche usate dai fisici che l'hanno formulata negli anni venti del secolo scorso.

La meccanica quantistica di Heisenberg, basata sul calcolo matriciale, certamente rappresenta un livello di difficoltà tecnica molto elevato per uno studente di liceo, ma l'insegnante potrebbe comunque spiegare che alla base di tale teoria vi sono strumenti noti e invitare studenti particolarmente motivati a un approfondimento specifico.

La proposta potrebbe sembrare eccessiva, ma l'esperienza conferma una caratteristica non trascurabile delle nostre scuole, ovvero la presenza di studenti la cui preparazione è estremamente diversificata e le cui motivazioni sono decisamente disomogenee. Di conseguenza i docenti hanno la necessità di sviluppare un'ulteriore competenza, riuscire a soddisfare contemporaneamente esigenze non uniformi e in alcuni casi in conflitto tra di esse.

Su un piano operativo non si dovrebbe rinunciare a stimolare le potenzialità di quegli studenti che in alcuni casi riescono a conseguire livelli di competenza inaspettati su argomenti ritenuti eccessivamente complicati, probabilmente anche grazie a una ridotta quantità di pregiudizi e di malintesi (*misconceptions* per gli inglesi) che talvolta si acquisiscono nei percorsi di studio.

In conclusione il problema e la relativa soluzione proposta vorrebbero rappresentare un elemento di riflessione sull'insegnamento della matematica, sulle potenzialità degli studenti, sul valore dei problemi che proponiamo e soprattutto sugli obiettivi che siamo tenuti a raggiungere. La scelta del problema della Scuola Normale, la cui nobile tradizione nel campo della didattica è universalmente riconosciuta, vuole essere un esempio per sottolineare che le situazioni da cui si sviluppa un problema non debbano necessariamente e forzosamente richiamarsi ad una non ben precisata contestualizzazione, ma prioritariamente debbano essere lo strumento per stimolare l'acquisizione in profondità di contenuti scientifici significativi per la formazione dei nostri studenti.

Il testo del problema

Una stanza ha 4 pareti, il pavimento, il soffitto. Una mosca si muove tra queste 6 superfici: se lascia il pavimento o il soffitto, può con probabilità 1/5 finire su ciascuna delle 4 pareti o ritornare sulla superficie dalla quale è partita. Se lascia una delle pareti, può con probabilità 1/5 finire su ciascuna delle altre 3 pareti, sul soffitto o sul pavimento. Se inizialmente la mosca è sul soffitto, qual è la probabilità che sia sul pavimento dopo k mosse?

Suggerimento: le soluzioni di un'equazione ricorsiva $y_{k+1} = a \cdot y_k + b \cdot q_k + c$ *con* $a \neq 1$ *e* $q \neq a$ *si possono determinare con la formula* $y_k = d_1 \cdot a_k + d_2 \cdot q_k + d_3$*, per opportune costanti* d_1, d_2, d_3.

La soluzione con le catene di Markov

Il problema può essere affrontato vedendolo come catena di Markov omogenea, poiché la probabilità di passare da uno stato all'altro dipende solamente dallo stato precedente.

L'insieme dei possibili stati è $\mathbf{V} = (S, P, p_1, p_2, p_3, p_4)$ dove S sta per soffitto, P per pavimento e le p minuscole per le pareti. La distribuzione iniziale della catena π_0, poiché la mosca parte dal soffitto, è

$$\pi_0(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = S \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

che può essere rappresentato come vettore riga, avendo stabilito che l'ordine delle componenti è lo stesso che compare nella definizione di $\mathbf{V}$:

$$\boldsymbol{\pi}_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Definiamo ora la matrice di transizione $\mathbf{T} = (t_{ij})$ dove t_{ij} è la probabilità di passare dallo stato i allo stato j.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

la distribuzione π_k degli stati al passo k è $\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_0\,\mathbf{T}^k$. Essendo $\mathbf{T}$ diagonalizzabile, il calcolo della k-esima potenza della matrice può essere fatto abbastanza agevolmente. $\mathbf{T}$ ha autovalori distinti 1, $1/5$, $-1/5$ e si decompone nel seguente modo: $\mathbf{T} = \mathbf{A\Delta A}^{-1}$ dove

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne deriva che

$$\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_0 \cdot \mathbf{T}^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^k+\frac{5^{-k}}{2} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^k-\frac{5^{-k}}{2} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5}\right)^k-\frac{1}{12}(-1)^k\,5^{1-k} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5}\right)^k-\frac{1}{12}(-1)^k\,5^{1-k} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5}\right)^k-\frac{1}{12}(-1)^k\,5^{1-k} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5}\right)^k-\frac{1}{12}(-1)^k\,5^{1-k} \end{pmatrix}^t.$$

La probabilità che ci interessa è quella che la mosca si trovi sul pavimento al passo k, quindi la seconda componente del vettore $\boldsymbol{\pi}_k$, ovvero

$$\pi_k(P) = \frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^k-\frac{5^{-k}}{2}.$$

Eventuali estensioni e osservazioni

Si può notare che per $k \to \infty$ la densità di probabilità tende alla probabilità uniforme:

$$\boldsymbol{\pi}_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Nel caso specifico questo fatto non dipende dalla distribuzione iniziale $\boldsymbol{\pi}_0$ a causa di proprietà intrinseche alla matrice di transizione $\mathbf{T}$. La mosca quindi, indipendentemente da dove parta, dopo un numero molto grande di salti si troverà all'incirca con la stessa probabilità su ciascuna delle sei pareti.

Per apprezzare la potenza del metodo utilizzato possiamo pensare di cambiare le probabilità di transizione da uno stato all'altro, per renderle più varie, ad esempio in questo problema le pareti laterali hanno un ruolo simmetrico, se così non fosse la ricorsione risulterebbe un po' più laboriosa; cosa che accadrebbe anche nel caso in cui le probabilità non fossero tutte uguali ad 1/5. Oltre alla potenza del metodo è necessario sottolineare ancora una volta i suoi limiti: calcolare le potenze generiche di una matrice può risultare non sempre semplice, soprattutto nel caso in cui essa non sia diagonalizzabile, in cui si è costretti a ricorrere alla forma di Jordan. Tuttavia con un programma di calcolo simbolico questi problemi vengono risolti senza troppo sforzo.

[*] Docente di Matematica e Fisica, I.I.S. "Sansi–Leonardi–Volta", Spoleto.
[**] Studente di Matematica, Scuola Galileiana di Studi Superiori, Padova

Una nota relativa al n. 213

In relazione all'articolo di Gabriele Lucchini, MatematicaMente n. 213, Carmine Suriano (della Sezione Mathesis di Foggia e autore di *Miniature matematiche* segnalato in internet) ha scritto: «*Dalla soluzione ottima x_0 = 1500/67=22,38... (c'è un errore tipografico, viene scritto 1500/37, errore mutuato dall'articolo riferito nella nota [1]) e y_0=2736/67= 40,83... viene dedotto che la soluzione da realizzare nella pratica corrisponde a x_1=22 e y_1= 40, tralasciando in entrambi i casi la parte decimale. Ciò non è corretto, perché siamo in presenza di un lattice nel piano (x, y) e quindi occorre esplorare (ricordiamo Weierstrass) l'intero quadrilatero "vicino" al punto (x_0, y_0) identificato da (22, 39) - (22, 40) - (23, 38) - (23, 39). Essi tutti rispettano i vincoli imposti e danno profitto pari rispettivamente a 327; 332; 328;* ***333;*** *quest'ultimo risolve il problema, non quello indicato*».

Gabriele Lucchini, ringrazia Carmine Suriano dell'attenzione data al suo articolo e dei controlli per la individuazione dei due errori e aggiunge: «*Purtroppo avevo il film "Linear Programming" in una videocassetta (che non ho la possibilità di rivedere) e penso di essermi fidato delle immagini, dato che si tratta di un film realizzato professionalmente con consulenza scientifica; ovviamente, il 3 al posto del 6 potrebbe, però, essere un mio errore di trascrizione. Molto più rilevante è il non aver considerato (allora) la eventualità di omissione di (23, 39), con la conseguente possibilità di segnalazione agli autori: se il film venisse reso fruibile in Italia, sarebbe un ulteriore elemento di approfondimento. Ma tale è comunque per i lettori grazie a Carmine Suriano*».

La redazione comunica di aver corretto il numero 213 e invita i lettori a scaricare la nuova versione collegandosi al sito *www. mathesisverona.it*.

Tu non sai

di Alda Merini

[…] «Tu non sai: ci sono betulle che di notte
levano le loro radici,
e tu non crederesti mai
che di notte gli alberi camminano
o diventano sogni.
Pensa che in un albero c'è un violino d'amore.
Pensa che un albero canta e ride.
Pensa che un albero sta in un crepaccio
e poi diventa vita.
Te l'ho già detto: i poeti non si redimono,
vanno lasciati volare tra gli alberi
come usignoli pronti a morire». […]

Da: Alda Merini, *L'anima innamorata*, pag. 30, Frassinelli, Milano, 2000