ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 215 – Pubblicato il 02 – 08 – 2016

Sulle equazioni di secondo grado

di Carmine Suriano [*]

Le uniche equazioni che si sanno veramente risolvere sono quelle algebriche di primo grado. Le altre, per essere risolte, devono essere in qualche modo ricondotte ad esse. La soluzione classica dell'equazione di secondo grado in x passa per lo *shift* $x=y+m$ che elimina il termine spurio e consente di effettuare una semplice estrazione di radice quadrata.

Può essere molto interessante proporre un approccio diverso che definisco "moderno" per i motivi che spero appariranno chiari nel seguito. Affrontiamo quindi lo stesso problema da un punto di vista lagrangiano come suggerito nelle *Réflexions sur la résolution algebrique des équations,* al n. 109. Il grande Torinese dice, a proposito della soluzione delle equazioni algebriche di terzo e quarto grado (originale in francese): «Se non mi sbaglio ecco il vero principio che sta alla base della risoluzione delle equazioni e l'approccio più appropriato da tenere; il tutto è ricondotto ad un particolare calcolo delle combinazioni, attraverso il quale si trovano *a priori* le soluzioni attese. È quindi il caso di applicare il metodo alla soluzione delle equazioni di grado quinto o di grado superiore, soluzione ad oggi sconosciuta». Lagrange si rende conto che gli sforzi richiesti sono grandi per lui per cui si accontenta di «aver posto le fondamenta di una teoria che ci sembra essere nuova e generale». Essa costituirà il cuore del lavoro di Galois.

Applichiamo il metodo alla equazione quadratica che possiamo sempre scrivere come

$$x^2+px+q=0 \tag{1}$$

Le relazioni di Viète dicono che, dette a, b le due radici della (1) è chiaramente

$$a+b=-p \tag{2a}$$

$$ab=q\ . \tag{2b}$$

Sia $a+\varepsilon b$ un polinomio omogeneo di primo grado nelle due radici a, b, dove ε è la radice quadrata dell'unità diversa da 1. Allora, preso $\varepsilon=-1$ possiamo considerare le 2! espressioni di tale polinomio quando si permutano in tutti i modi possibili (per il secondo grado sono appunto 2) le radici e così abbiamo

$$a-b=\alpha \tag{3a}$$

$$b-a=-\alpha\ . \tag{3b}$$

È possibile introdurre una equazione ausiliaria (la cosiddetta risolvente) in una nuova incognita y che assume tutti i valori ottenibili dalle diverse permutazioni viste, ovvero i valori (3a) e (3b); ne risulta una equazione di secondo grado in tale incognita

$$(y+\alpha)(y-\alpha)=y^2-\alpha^2=0\ . \tag{4}$$

Essa contiene solo i termini di grado pari. Esplicitiamo il valore di α^2

$$\alpha^2=a^2-2ab+b^2=a^2+2ab+b^2-4ab=$$

$$=(a+b)^2-4ab=p^2-4q$$

dove abbiamo usato le (2) nell'ultimo passaggio. Per la (4)

$$y=\alpha=\sqrt{p^2-4q}\ .$$

Come si può notare, il polinomio nelle radici a, b è esprimibile come funzione dei coefficienti p, q. Le equazioni

$$a-b=\sqrt{p^2-4q}$$

e

$$a+b=-p$$

risolte simultaneamente, forniscono il valore delle due radici

$$a=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$b=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

come ci aspettavamo. Il metodo permette di abbassare un problema di secondo grado ad uno di primo grado. Naturalmente nel caso mostrato non si apprezza l'efficienza del metodo, ma se ne intuisce la generalità.

Si può quindi proporre di affrontare allo stesso modo l'equazione di terzo grado, che mi limito a impostare per sommi capi. Sia

$$x^3+px^2+qx+r=0 \tag{5}$$

e a, b, c le sue radici. Le relazioni di Viéte sono

$$a+b+c=-p \tag{6a}$$

$$ab+bc+ac=q \tag{6b}$$

$$abc=-r\quad . \tag{6c}$$

Il polinomio risolvente ausiliario nelle tre radici è

$$a+\varepsilon b+\varepsilon^2 c \tag{7}$$

dove ε è una delle radici cubiche dell'unità diversa da 1. Allora, preso

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{(col che } \varepsilon^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

possiamo considerare le 3! espressioni di tale polinomio quando si permutano in tutti i modi possibili (per il terzo grado sono appunto 6) le radici, quindi abbiamo le seguenti (8)

$$a+\varepsilon b+\varepsilon^2 c=a+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c=\alpha$$

$$a+\varepsilon c+\varepsilon^2 b=a+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c=\beta$$

$$b+\varepsilon a+\varepsilon^2 c=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+b+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c=\varepsilon^2\beta$$

$$b+\varepsilon c+\varepsilon^2 a=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+b+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c=\varepsilon\alpha$$

$$c+\varepsilon a+\varepsilon^2 b=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b+c=\varepsilon^2\alpha$$

$$c+\varepsilon b+\varepsilon^2 a=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b+c=\varepsilon\beta\ .$$

Ancora una volta introduciamo una nuova incognita y che assume tutti i valori ottenibili dalle 6 diverse permutazioni appena viste. L'equazione risolvente è pertanto

$$(y-\alpha)(y-\varepsilon\alpha)\left(y-\varepsilon^2\alpha\right)(y-\beta)(y-\varepsilon\beta)\left(y-\varepsilon^2\beta\right)=0 \tag{9}$$

L'espressione risultante contiene anche le potenze dispari, vediamo il coefficiente ad esempio di y^5:

$$(a+b)\varepsilon^2+(a+b)\varepsilon+(a+b)=(a+b)(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0$$

perché $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$; e così per i coefficienti di y^4, y^2 e y. Svolgendo i calcoli si ottiene una equazione trinomia in y^3

$$y^6-(\alpha^3+\beta^3)y^3+\alpha^3\beta^3=0\,. \qquad (9.1)$$

Posto $y^3 = t$ essa diventa

$$t^2-(\alpha^3+\beta^3)t+\alpha^3\beta^3=0$$

e il problema di terzo grado si riduce ad uno di secondo. Si otterranno due soluzioni

$$y_1=\sqrt[3]{z_1}$$

$$y_2=\sqrt[3]{z_2}$$

dove z_1 e z_2 sono funzioni di p, q, r [B.1]. Imponendo le condizioni $y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$ e la (6a) di Viéte, si ottengono infine tre equazioni lineari in tre incognite che consentono di ricavare a, b, c:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-p+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}}{3} \\ b &= \frac{-p+\varepsilon^2\sqrt[3]{z_1}+\varepsilon\sqrt[3]{z_2}}{3} \qquad (10) \\ c &= \frac{-p+\varepsilon\sqrt[3]{z_1}+\varepsilon^2\sqrt[3]{z_2}}{3}\,. \end{aligned}$$

Nel volume riportato in bibliografia al punto 2 viene trattato il caso del quarto grado.

Il metodo combinatorio di approccio alle equazioni algebriche di grado n (n = 2, 3, 4) può essere in sostanza così riassunto: si costruisce un polinomio risolvente ausiliario del tipo (7) che è funzione di tutte le n radici e di una delle radici dell'unità diversa da 1. Si permutano in tutti i possibili $n!$ modi le radici tra loro; si otterranno $n!$ valori di quel polinomio, corrispondenti ad altrettanti valori di una incognita ausiliaria, che abbiamo chiamato y. Si genera una equazione algebrica ausiliaria in tale incognita. Si verifica che molti coefficienti si annullano a causa della simmetria che si ottiene dalle permutazioni effettuate e della struttura del polinomio risolvente ausiliario. Per le equazioni di secondo e quarto grado sono nulli i coefficienti dei termini di grado dispari: si ottengono rispettivamente una equazione pura (la (4)) ed una equazione riconducibile al terzo grado. Infatti, dalle $4! = 24$ permutazioni, ponendo $\varepsilon = -1$ nel polinomio risolvente ausiliario, si ottengono solo 6 valori diversi: α, $-\alpha$, β, $-\beta$, γ, $-\gamma$; per cui l'equazione in y è del sesto grado; mediante la posizione $y^2 = t$ se ne ottiene una di terzo, che si sa risolvere. Per l'equazione generale di terzo grado si ottiene l'equazione trinomia (9.1), che si riconduce a sua volta ad una di secondo grado.

Per il quinto grado le cose non vanno come sperato: le $5! = 120$ permutazioni generano una equazione ausiliaria i cui coefficienti non si comportano allo stesso modo. Ruffini, Abel e Galois dimostreranno che $n = 5$ costituisce un limite invalicabile e che nessun metodo algebrico può fornire soluzioni del tipo (10).

Riferimenti bibliografici: [B.1] Lagrange J. L., *Réflexions sur la résolution algebrique des equations* (1771), in Oeuvres vol. 3, Gauthier-Villars, Paris 1869. [B.2] Aleksandrov A. D., Kolmogorov A. N., *Le matematiche*, Boringhieri-Milano, 1997

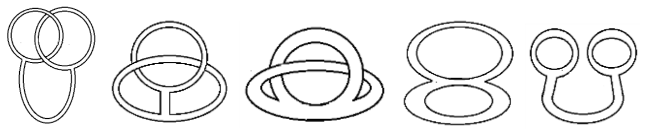
[*] Mathesis, sezione di Foggia; email: carmine.suriano@alenia.it

… Terribilis est locus iste…

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 208]

Quando ci si deve fidare di qualcuno è necessario verificare il senso stesso del diffidare. Così accade ogni volta che si affrontano idee nuove che pongono in discussione luoghi comuni istintivamente accettati dai più. Mi ricordo che durante la lettura di un argomento di topologia, contro ogni ragionevolezza, l'autore spiegava come una superficie annodata potesse essere modificata a tal punto da far sparire il nodo, nel rispetto delle proprietà topologiche spaziali sia locali (della superficie), sia generali (dello spazio in cui è immersa): uno stratagemma da prestigiatori? No: da matematici. Dato un oggetto immerso in uno spazio $\mathbf{R}^3$, la superficie annodata A in 4 mosse può essere snodata nel rispetto delle sue proprietà locali.



A B C D E

Figura 1. L'oggetto rappresentato in A è tubolare con spessore infinitesimo e di esso ci interessano le proprietà topologiche della sua superficie. Dall'annodamento A, si può passare allo stato E (privo di nodi) senza che siano variate le proprietà topologiche dell'oggetto.

Ovviamente l'oggetto deve essere plastico. Che significa "in 4 mosse"? Conviene chiarire meglio il movimento definendo in modo opportuno ciò che viene fatto. Consideriamo una proprietà P di un certo insieme immerso in uno spazio topologico X. Allora essa è topologicamente invariante se tutte le volte che uno spazio (X, T) gode di P, allora anche ogni spazio omeomorfo a (X, T) gode di P. Insomma se una trasformazione cambia qualcosa di significativo, allora quel qualcosa non deve essere una proprietà topologica; altrimenti lo è. Per esempio, se confrontiamo l'intervallo aperto sulla retta reale (0, 1) con l'insieme dei punti dello spazio della retta reale, scopriamo che la proprietà "lunghezza" non è una proprietà topologica in quanto cambia. Anche la proprietà "essere limitato" non è topologica in quanto l'intervallo (0, 1) lo è, mentre $(-\infty, +\infty)$ no. Al contrario, le proprietà "connessione" e "compattezza" sono topologiche.

Irina mi fa segno che non conviene entrare nelle sottigliezze della topologia e mi indica una scia dove scivolare verso casa: il nostro mondo. Percorro velocemente un tratto di spazio a una tale velocità che non posso vedere alcunché di significativo dall'oblò, tranne che un puntino illuminato davanti a me (la navicella spaziale di Irina). Sarà vero che a velocità relativistiche il tempo rallenta e tutto si ferma, ma se all'aumentare della velocità, portandola verso quella della luce, capita di sentirsi così male, che può succedere quando la si raggiunge? Irina dal suo oblò mi guarda e ride. Il mio contenitore di bordo si sta deformando; sta prendendo forma di computer; sta calcolando qualcosa; forse la rotta per il rientro. Vedo di lontano un pianeta azzurro con striature bianche; mi pare la Terra. La navicella di Irina scompare. Non ricevo più segnali da lei, ma la Terra è vicina e io sono a casa. L'impatto mi sveglia e … il sogno finisce. Mi resta nella mente questo viaggio ipotetico e le considerazioni che lo hanno accompagnato. Vivere è sognare e nella molteplicità dei sogni si possono incontrare altre modalità di vita, molto diverse dalle quotidiane abitudini. Si possono incontrare mostruosità e si può anche familiarizzare con esse. Se il pensiero che nasce dalle sottili disquisizioni topologiche può aiutare a scuotere la monotonia di ciò che ci circonda, allora ben venga "sognare topologicamente". Peraltro il processo che ci porta ad astrarre diventa determinante per capire lo stato dell'universo, per avere più padronanza delle regole e dei principi che lo reggono. L'astrazione, da non confondersi con la semplificazione, è un processo faticoso, ma necessario. Sono a casa, conoscono le regole e sto bene. La Terra non è un eden ma, quando si sta bene, ci si può accontentare.

Cont a la man (Conti alla mano)

di Giovanni Previdi

Se 'n minüt al dürés dü minüt, cónt a la man, a sarésan ind al Milaesinc e ag avrés sédz an. E alóra kisà, mi e ti, giuedi.	Se un minuto durasse due minuti, conti alla mano, saremmo nel Millecinque e avrei sedici anni. E allora chissà, io e te, giovedì

Tratto da: Giovanni Previdi, Due fettine di salame, poesie, Quodlibet, Macerata, 2013