ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 217 – Pubblicato il 07 – 10 – 2016

Ancora sulle *catene di Markov* applicate ad un problema SNS

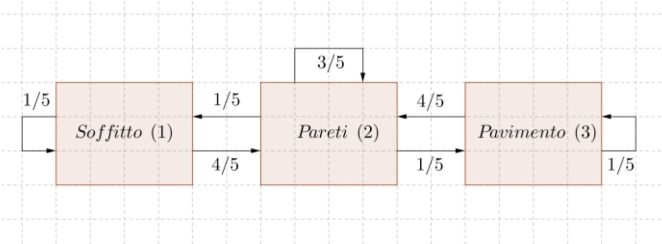
di Luigi Verolino [*]

Si riporta nelle sue linee essenziali una soluzione del secondo problema per l'accesso ai corsi di laurea in Matematica, Fisica ed Informatica della Scuola Normale Superiore di Pisa per l'anno accademico 2015-2016. La soluzione proposta è diversa da quella ufficiale e da quella di Massimo Fioroni e Daniele Nemmi, recentemente pubblicata su *MatematicaMente* n. 214: in effetti, quanto di seguito discusso semplifica lo studio del processo markoviano ed utilizza una Matematica più adatta alla secondaria superiore. Diamo per noto il testo reperibile nel n. 214 di MatematicaMente.

Dopo k mosse la mosca può trovarsi sul soffitto, sulle pareti oppure sul pavimento, con le seguenti probabilità, ovviamente incognite,

1 – soffitto $\to p_1(k)$, 2 – pareti $\to p_2(k)$, 3 – pavimento $\to p_3(k)$

In cui k rappresenta una variabile intera, il cosiddetto tempo discreto, che assume tutti i possibili valori naturali $k \in \mathbb{N}$.



Il diagramma precedente consente di studiare la transizione tra la mossa k e la successiva $k+1$ e ottenere il sistema

$$\begin{cases} p_1(k+1) = \frac{1}{5}p_1(k) + \frac{1}{5}p_2(k)\,, \\ p_2(k+1) = \frac{4}{5}p_1(k) + \frac{3}{5}p_2(k) + \frac{4}{5}p_3(k)\,, \\ p_3(k+1) = \frac{1}{5}p_2(k) + \frac{1}{5}p_3(k)\,. \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} p_1(0) = 1, \\ p_2(0) = 0, \\ p_3(0) = 0. \end{cases}$$

Ora, dato che la richiesta dell'esercizio è determinare $p_3(k)$, procedendo algebricamente e adoperando la soluzione della generica equazione alle ricorrenze fornita dal testo, si ottiene la soluzione

$$\begin{cases} p_1(k) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^k + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^k, \\ p_2(k) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^k, \\ p_3(k) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^k - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^k. \end{cases}$$

La tabella che segue riporta, quale esempio, i primi valori di $p_3(k)$ al variare di k, mostrando chiaramente che essi sono a due a due uguali. Vale allora la pena fare alcune osservazioni sull'andamento di questa probabilità al crescere del numero di mosse.

k	0	1	2	3	4	5
$p_3(k)$	0	0	4/25	4/25	104/625	104/625

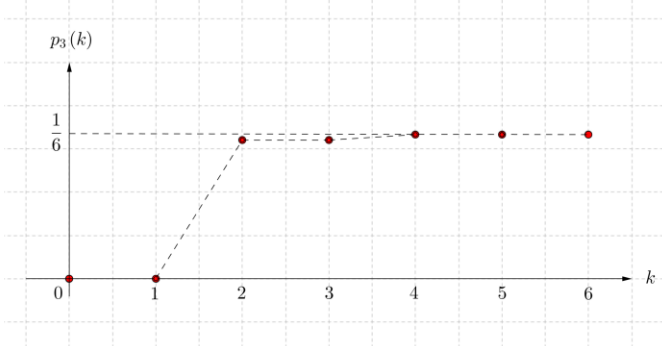
Se la mosca esegue un numero elevato di mosse, che al limite diventa infinito, si verifica subito che

$$\lim_{k\to\infty} p_3(k) = 1/6 = 0.1\overline{6}\,.$$

Questo valore limite viene raggiunto piuttosto rapidamente, dato che, ad esempio, già dopo quattro voli risulta

$$p_3(4) = 104/625 = 0.1664\,,$$

vale a dire un valore già molto prossimo a quello asintotico, come si verifica anche dal grafico riportato.



Inoltre, dalla tabella o dal grafico si nota che

$$p_3(2) = p_3(3) = 4/25\,,\quad p_3(4) = p_3(5) = 104/625\,,$$

una proprietà generale che si giustifica facilmente, disponendo della soluzione analitica, ma anche riprendendo l'equazione ricorsiva, per cui

$$\begin{aligned} p_3(k+1) &= p_3(k) + 2\left(-\frac{1}{5}\right)^{k+1} + 2\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \\ &= p_3(k) + 2\,\frac{1-(-1)^k}{5^{k+1}}\,. \end{aligned}$$

Se k è pari, ad esempio $k = 2n$, si ha che il fattore

$$1-(-1)^k = 1-(-1)^{2n} = 1-1 = 0$$

svanisce e, quindi, si può scrivere

$$p_3(2n+1) = p_3(2n)\,.$$

Al contrario, se $k = 2n-1$ (con $n \geq 1$), allora si ha

$$p_3(2n) = p_3(2n-1) + \frac{4}{5^{2n}}$$

e, al crescere di n, il termine aggiuntivo tende rapidamente a zero.

[*] Università Federico II di Napoli - DIETI - Via Claudio, 21 [80125] Napoli

Analisi matematica standard e non standard a confronto - 2

di Alberto Burato [**] e Luciano Corso [***]

Il concetto di funzione uniformemente continua raramente viene trattato negli ultimi anni delle scuole superiori, in particolare nei licei scientifici. Si ritiene che non sia rilevante nella formazione essenziale di analisi matematica a livello pre-universitario e che sia ostica la dimostrazione che deve accompagnare ogni affermazione di uniforme continuità di una funzione. Tuttavia, sappiamo invece quanto esso sia importante nella teoria dell'integrazione di funzioni e per comprendere meglio lo sviluppo storico del concetto di continuità. A questo proposito, è bene ricordare [B.2] che per Eulero la continuità è una proprietà globale di una funzione, una proprietà che ne denota la natura su tutto il suo dominio, e lo stesso Cauchy quando parlava di funzioni continue le intendeva continue su intervalli limitati: «la funzione $f(x)$ resterà continua rispetto a x entro limiti dati se, entro questi limiti, un incremento infinitesimo della variabile produce sempre un incremento infinitesimo della funzione stessa.» (*Course d'analyse* – 1821)

In tempi più recenti, all'interno dell'analisi costruttivista di Erret Bishop (1928-1983), le funzioni di maggiore interesse sono proprio quelle uniformemente continue. Anche vari studiosi impegnati in ricerche di didattica della matematica, ci riferiamo per esempio a David Tall e Shlomo Vinner [B.3], sottolineano che la nozione che uno studente ha di funzione continua (l'immagine mentale che si è costruita nel tempo) prima di affrontare i corsi di analisi matematica è globale su un intervallo e non in un punto. Siamo di fronte a un ostacolo epistemologico [B. 4] e questa differenza tra formalismo e intuizione è la fonte di notevoli conflitti cognitivi (si domandi agli studenti o perfino a qualche insegnante di matematica di dire qualcosa sulla continuità della funzione di Dirichlet modificata e non mancheranno sorprese). Per superare queste difficoltà, la proposta didattica di parlare di funzione (uniformemente) continua in un intervallo anziché di funzione continua in un punto è forse troppo radicale, sebbene anche Giovanni Prodi la guardasse con interesse [B.5], ma va a nostro avviso comunque raccolta la sfida di presentare il concetto di uniforme continuità anche nelle scuole superiori. In questo articolo, attraverso il confronto tra i punti di vista dell'analisi standard e dell'analisi non standard, vogliamo mettere in evidenza che il linguaggio della NSA consente una presentazione più semplice dell'argomento, con indubbio vantaggio per la didattica.

Continuità uniforme di una funzione [B.7]

In *analisi standard* si dice che una funzione $f(x)$ è uniformemente continua in $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}$, se

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in \mathbf{X}, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$ (3)

Vale la pena riflettere sulla definizione data. Se f è uniformemente continua su un intervallo $[a, b]$ allora, in corrispondenza di ogni scelta di $\varepsilon > 0$, possiamo suddividere l'intervallo $[a, b]$ in un numero finito di parti $[x_{i-1}, x_i]$ di ampiezza minore di $\delta > 0$ tali che in ciascuna di esse l'oscillazione della funzione risulti minore di ε (*small span theorem*). L'importanza pratica di questo risultato è evidente, perché assicura la possibilità di approssimare $f(x)$ con $f(x_i)$, dove x_i è un estremo dell'intervallo in cui cade x, commettendo sempre un errore inferiore a ε.

Usiamo (3) per verificare che $f(x) = x^2$ è uniformemente continua in ogni intervallo limitato $\mathbf{X}$ di estremi a, b, ma non su intervalli illimitati. Supponiamo per semplicità $0 \le a < b$ e fissiamo in modo arbitrario un valore positivo di ε. Si ha, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{X}$:

$$|x_1^2 - x_2^2| = (x_1 + x_2) \cdot |x_1 - x_2| \le 2b \cdot |x_1 - x_2|.$$

Basta allora scegliere $\delta = \varepsilon / (2b)$ per concludere.

Se $\mathbf{X}$ è un intervallo illimitato, per esempio $\mathbf{X} = \mathbf{R}$, il precedente ragionamento non è applicabile (perché $f(x)$ non è limitata su $\mathbf{R}$). Scegliamo, dato $\delta > 0$, i punti $x_1 = 2 / \delta$ e $x_2 = 2 / \delta + \delta / 2$. Sono punti arbitrariamente "vicini", perché $|x_1 - x_2| = \delta / 2 < \delta$, ma le loro immagini hanno una distanza superiore a 1. Infatti:

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| > \frac{2}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = 1.$$

Ciò è contro a quanto richiesto per l'uniforme continuità di $f(x)$ (basta prendere $\varepsilon = ½$).

Nell'*analisi non standard*, il concetto di uniforme continuità di una funzione reale si esprime in modo molto semplice [B.6], consentendo di superare alcune difficoltà (complicazioni?) legate al formalismo ε-δ: una funzione $f(x)$ definita in un dominio $^*\mathbf{X} \subseteq {}^*\mathbf{R}$ è uniformemente continua se e solo se

$\forall x_1, x_2 \in {}^*\mathbf{X}: x_1 \approx x_2 \Rightarrow f(x_1) \approx f(x_2),$ (4)

dove con f indichiamo, come consuetudine, anche l'estensione naturale di f all'ambiente $^*\mathbf{R}$. In altri termini, due punti infinitamente vicini nell'estensione iperreale di $\mathbf{X}$ hanno immagini infinitamente vicine (provate ora a fare un confronto con la definizione di Cauchy citata all'inizio!).

Dimostriamo, seguendo l'approccio *non standard*, l'uniforme continuità di $f(x) = x^2$ su ogni intervallo limitato $\mathbf{X}$ di $\mathbf{R}$. Siano x_1, x_2 due punti di $^*\mathbf{X}$ infinitamente vicini ($x_1 - x_2 = \varepsilon$, con ε infinitesimo). Allora:

$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) = \varepsilon \cdot (x_1 + x_2) \approx 0$

e quindi anche $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sono infinitamente vicini.

Sia ora, invece, $\mathbf{X} = \mathbf{R}$ (e quindi $^*\mathbf{X} = {}^*\mathbf{R}$). Posto

$$x_1 = H, \qquad x_2 = H + \frac{1}{H},$$

dove H è un iperreale infinito, si ha che la differenza

$$f(x_1) - f(x_2) = H^2 - \left(H + \frac{1}{H}\right)^2 = -2 - \frac{1}{H^2} \approx -2$$

non è un infinitesimo e pertanto f non è uniformemente continua in $\mathbf{R}$.

Gli esempi precedenti non devono trarre in inganno, facendo sospettare che il tipo d'intervallo su cui è definita la funzione f sia decisivo per stabilire l'uniforme continuità. Proviamo, solo con metodi *non standard*, che la funzione $f(x) = 1 / x$ è invece uniformemente continua in $\mathbf{X} = [a, +\infty)$, con $a > 0$, ma non uniformemente continua in $(0, a]$. Nel 1° caso, siano x_1, x_2 due numeri iperreali infinitamente vicini in $^*[a, +\infty)$. Allora:

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} \approx 0\ ,$$

essendo $x_2 - x_1 \approx 0$ e $x_1 \cdot x_2$ finito (non infinitesimo) o infinito. Pertanto f è uniformemente continua in $\mathbf{X}$. Nel 2° caso, invece, si considerino due infinitesimi positivi, $x_1 = \xi_1$ e $x_2 = \xi_2$. Si ha:

$$\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_2} \approx H\ ,$$

dove H è un infinito in quanto il numeratore del rapporto è un infinitesimo e il denominatore è un infinitesimo di ordine superiore [B.1]; perciò concludiamo che in $(0, a]$ la funzione non è uniformemente continua.

Il lettore è invitato a dimostrare questi due risultati con le usuali tecniche standard che, pur non presentando difficoltà insormontabili, costringono a qualche passaggio sicuramente meno immediato. Però, si badi bene che neppure il fatto che f sia limitata su un intervallo limitato può essere garanzia dell'uniforme continuità (come contro esempio basta considerare $f(x) = \sin(1 / x), x \in (0, 1]$).

Concludiamo allora ricordando uno dei risultati più importanti sulle funzioni uniformemente continue: il teorema di Heine-Cantor. *Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato di* $\mathbf{R}$ *è uniformemente continua*. Lasciamo ancora al lettore la dimostrazione standard, che può trovare in ogni buon libro di analisi, ma lo sollecitiamo a confrontarla con la dimostrazione non standard che proponiamo, convinti che la semplicità e l'eleganza di quest'ultima porterà qualcuno a riscoprire le radici del calcolo infinitesimale e ad approfondire le idee della NSA.

Dimostrazione (Heine-Cantor): siano $x, y \in {}^*[a, b]$, $x \approx y$. Allora le parti standard di x e y coincidono e, indicato con c il loro valore comune, si ha $c \in [a, b]$. Dal momento che f è continua in c per ipotesi, abbiamo $f(x) \approx f(c) \approx f(y)$. Q.E.D.

Riferimenti bibliografici: [B.1] MatematicaMente nn. 205, 207, 210, 211, a cura del gruppo NSA di Verona, Mathesis Verona, 2016. [B.2] Bottazzini U., *Il calcolo sublime. Storia della matematica da Euler a Weierstrass*, Boringhieri, Torino, 1981. [B.3] Tall D., Vinner S., *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*, in "Educational Studies in Mathematics", Vol. 12 (2), 1981, pp. 151-169. [B.4] Brousseau G., *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*, in Bednarz N. e Garnier C. (a cura di), Construction des Savoirs: Obstacles et Conflits, CIRADE, Ottawa, 1989, pp. 41-63. [B.5] Prodi G., *Riflessioni sull'insegnamento dell'analisi matematica*, in "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", Vol. 16 (5-6), 1993, pp. 448-457. [B.6] Goldblatt R., Lectures on the Hyperreals. *An Introduction to Nonstandard Analysis,* Springer, New York, 1988. [B.7] Si veda anche l'articolo di A. Burato e L. Corso, in MatematicaMente n. 216, sulla continuità (confronto tra i due metodi).

[**] Presidente della sezione di Verona della Mathesis.
[***] Consigliere nazionale della Mathesis