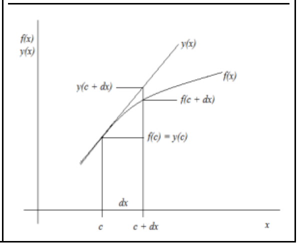
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 218 – Pubblicato il 04 – 11 – 2016



L'analisi infinitesimale mediante i numeri euclidei

Una introduzione elementare

di Vieri Benci [*]

1 Introduzione

In questa nota proponiamo una presentazione dei numeri euclidei [1] come potrebbe essere fatta ad uno studente che **non conosce ancora i numeri reali**. L'idea che ci sta sotto è che i numeri euclidei siano molto più vicini all'intuizione che i numeri reali. Pertanto una definizione assiomatica dei numeri euclidei è più naturale di una analoga definizione dei reali [2]. In questa presentazione si presuppone che il lettore conosca un minimo del linguaggio della teoria ingenua degli insiemi, i numeri razionali, la geometria euclidea di base. Partendo da tutto ciò costruiremo l'analisi infinitesimale basata più sui numeri euclidei che sui numeri reali. Le principali nozioni dell'analisi (derivata, integrale etc.) verranno fornite in modo **non equivalente** a quello usuale. Questo fatto *è voluto*, non è determinato dalla scelta dell'uso dei numeri euclidei. L'idea che ci sta sotto è quella di costruire l'analisi nel modo **più semplice possibile** una volta che si è deciso di basarci sui numeri euclidei senza rispettare la tradizione (fondata sui numeri reali) che ha portato a certi concetti che appaiono naturali solo perché non si possono usare grandezze infinitesime. Questo ragionamento apparirà più chiaro quando vedremo i singoli esempi.

Come ho già detto, si presuppone che il lettore abbia una conoscenza minima di matematica e me lo immagino come uno studente liceale molto bravo, ma ovviamente la maggior parte dei lettori di questo articolo conosce già l'analisi matematica. Quindi ogni volta che introdurrò un concetto *poco ortodosso* cercherò di giustificarlo con una **osservazione per gli insegnanti**.

Questa presentazione si divide in due sezioni:

• 1 – **Numeri euclidei**: in questa sezione si presentano i numeri euclidei e le loro principali proprietà. Da questi si deducono i numeri reali.

• 2 – **Calcolo infinitesimale euclideo**: in questa sezione si introducono le nozioni principali del calcolo infinitesimale per mostrare il modo con cui i numeri euclidei possono essere impiegati. Per rendere la materia più semplice, sfruttiamo alcune intuizioni geometriche al posto dei relativi teoremi; per esempio si introduce l'integrale come "area" e non come "somma infinita". Un tale approccio potrebbe essere adeguato per alcune scuole ove non si richiede troppo rigore.

In un futuro non troppo lontano mi propongo di completare la teoria esposta in questa nota presentando in modo completo un corso di Analisi del primo anno di università.

Vorrei sottolineare il fatto che la teoria dei numeri euclidei può essere considerata come una delle possibili introduzioni/ presentazioni dell'Analisi Non Standard (ANS) (vedi [B.12],[B.10]). Infatti il campo dei numeri euclidei è un campo iperreale, ovvero uno di quei campi che possono essere usati per sviluppare l'ANS. Il campo dei numeri euclidei però presenta una struttura in più che permette di definire somme transfinite. Le somme transfinite, non solo arricchiscono tutta la struttura, ma al contempo, permettono una presentazione assiomatica della materia molto semplice e naturale (o almeno così mi sembra). E questa presentazione è ciò che viene fatto qui.

Prima di concludere questa introduzione vorrei dare una risposta alla seguente domanda:

Perché la gente dovrebbe usare i numeri infiniti ed infinitesimi?

Molti fautori dell'ANS risponderebbero che l'uso dei numeri infiniti ed infinitesimi rende le dimostrazioni più semplici e vicine all'intuizione. Pur condividendo questa convinzione, io penso che ci sia un motivo molto più importante per usare numeri infiniti ed infinitesimi ed i concetti che da essi derivano: tali numeri arricchiscono enormemente il linguaggio matematico e permettono di costruire modelli della realtà più efficienti ed eleganti (vedi ad esempio [B.6], [B.7], [B.8]) etc. La cosa più importante, non è quella di dimostrare vecchi teoremi, ma di creare nuovi modelli e nuovi concetti.

2 I numeri euclidei

2.1 Definizione dei numeri euclidei

In modo euristico, i numeri euclidei sono definiti come quei numeri *che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea* dopo aver scelto un punto O in rappresentanza dello 0 ed un punto U $\neq 0$ in rappresentanza dell'unità. Il loro insieme verrà denotato con la lettera $\mathbb{E}$. Sfruttando le costruzioni con riga e compasso si possono definire le quattro operazioni e fornire ai numeri euclidei la struttura di campo ordinato. Inoltre si vede immediatamente che i numeri razionali formano un loro sottocampo. Sfruttando il solito teorema dell'irrazionalità della radice di due, si ha che i numeri razionali non esauriscono i numeri euclidei. I punti che non hanno coordinata razionale corrispondono a numeri euclidei di natura molto diversa dai numeri razionali.

Il problema che si pone adesso è quello di determinare un modo "aritmetico" di rappresentare i numeri euclidei per rendere possibili forme di calcolo che possano andare al di là di quelle eseguibili con riga e compasso. Per iniziare dobbiamo aritmetizzare tali forme di calcolo che per il momento possiamo eseguire solo geometricamente. Per procedere in questa direzione consideriamo un vecchio problema classico; quello del numero $\sqrt{2}$. Sfruttando le cifre che ricaviamo mediante l'algoritmo di estrazione della radice quadrata, in genere scriviamo

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \tag{1}$$

Ma che cosa significa questa scrittura? Per un lettore "vergine" questa è una approssimazione di $\sqrt{2}$ che significa che $\sqrt{2}$ può essere approssimata da una somma di infiniti termini. Pertanto, se vogliamo trattare numericamente $\sqrt{2}$ sembra naturale introdurre un nuovo algoritmo detto **somma transfinita**. Tale somma verrà indicata nel seguente modo:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k, \tag{2}$$

ove $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ denota l'insieme dei numeri naturali.

Osservazione 2.1 (Per insegnanti) *La nozione di somma transfinita non coincide con la nozione di serie; per evidenziare la loro differenza useremo simboli diversi;* $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ *per le somme transfinite;* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *per le serie e l'usuale simbolo* $\sum_{k=0}^{n} a_k$ *per le somme finite*.

Come è noto fino dall'antichità, applicando alle somme infinite le stesse regole che si applicano alle somme finite si incorre facilmente in contraddizione. Un esempio per tutti. Consideriamo la somma infinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k = 1-1+1-1+1-1+\cdots \qquad (3)$$

Applicando la proprietà associativa si ha:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0$$

ma applicando la proprietà associativa in modo diverso, si ha anche

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1.$$

Pertanto, operando con somme transfinite, bisogna attenersi strettamente a regole coerenti. In primo luogo gli addendi devono essere numeri "a_k" ai quali è stato "attaccato" un numero naturale "k" come indice, ovvero un'espressione del tipo (2).

L'operazione "*somma transfinita*" è governata dalle seguenti regole:

1. (*regola delle somme finite*) Se $a_k = 0$, tranne un numero finito di addendi, allora la somma transfinita coincide con la usuale somma finita;
2. (*regola della somma*)
$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\right)+\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}}(a_k+b_k)\ ;$$
3. (*regola del prodotto*)
$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\ ,$$
ove $c_k = \sum_{max(h,l)=k} a_h b_l$;
4. (*regola del confronto*) se gli a_k sono numeri razionali e se per m sufficientemente grande
$$\sum_{k=0}^{m!} a_k \geq \sum_{k=0}^{m!} b_k \qquad \left(risp. \sum_{k=0}^{m!} a_k > \sum_{k=0}^{m!} b_k\right),$$
allora
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \qquad \left(risp. \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k > \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\right).$$

Si osservi che dalla regola del confronto si deduce facilmente il seguente fatto: se per ogni m sufficientemente grande

$$\sum_{k=0}^{m!} a_k = \sum_{k=0}^{m!} b_k \quad allora \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\ . \qquad (4)$$

Osservazione 2.2 (Per gli insegnanti) *La regola del confronto vale anche se gli a_k sono numeri reali, ma a questo punto assumiamo di non conoscere ancora i numeri reali. Osserviamo inoltre che la regola del confronto con la disuguaglianza stretta può essere dedotta dagli altri assiomi, ma la dimostrazione è piuttosto delicata e pertanto abbiamo preferito ometterla.*

Esercizio 2.1 Dimostrare che la somma transfinita (3) vale 1.
Svolgimento: Se $m \geq 2$, $m!$ è un numero pari, per cui $\sum_{k=0}^{m!}(-1)^k$ contiene un numero dispari di termini. Dunque $\sum_{k=0}^{m!}(-1)^k = 1$ ovvero $\sum_{k=0}^{m!}(-1)^k = \sum_{k=0}^{m!} b_k$, ove $b_0 = 1$, $b_k = 0$ per $k \geq 1$; dalla (4) e dalla regola delle somme finite segue che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k = 1. \qquad (5)$$

Osservazione 2.3 (Per gli insegnanti) *È evidente che il superamento dei numeri razionali rappresenta, sia che si arrivi ai reali, sia che si arrivi ai numeri euclidei, un grosso salto verso l'astrazione. In un modo o nell'altro si devono introdurre operazioni che coinvolgono l'infinito. Nell'analisi matematica tradizionale, l'uso dell'infinito e degli infinitesimi viene "mascherato" dalla nozione di limite alla Weierstrass. Nel nostro approccio, la liceità di compiere* ***infinite*** *volte operazioni elementari viene ammessa esplicitamente. Per esempio, l'addizione del segmento unitario con se stesso fatta infinite volte definisce un numero infinito che chiameremo ω. Ormai il Rubicone dell'infinito attuale è stato passato in modo esplicito. Certo bisogna attrezzarsi contro "il timore dell'infinito". Si può provare un certo senso di disagio quando si dice che ogni numero diverso da zero ha l'inverso. L'inverso di ω strettamente parlando non si può costruire con riga e compasso, ma ad essere onesti neanche l'inverso di 10^{100} può essere costruito in tal modo e dire che in "linea di principio si può fare l'una cosa e non l'altra" è di certo una frase priva di senso. Ciò nonostante, né ω^{-1}, né 10^{-100} devono farci paura.*

2.2 Le numerosità

Cerchiamo adesso di familiarizzarci con l'idea di somma transfinita. La cosa più semplice che può venire in mente è quella di sommare un po' di "1" e "0". Per formalizzare questo fatto risulta utile definire la funzione indicatrice di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$:

$$\chi_E(k) = \begin{cases} 1 & se \quad k \in E \\ 0 & se \quad k \notin E\ . \end{cases}$$

Per ogni insieme E si può definire il numero

$$n(E) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_E(k)$$

detto numerosità di E. Se E è un insieme finito, la sua numerosità corrisponde al numero degli elementi di E. Altrimenti il numero $n(E)$ è un numero infinito che "generalizza" la precedente nozione. In altre parole, la numerosità è una funzione che conta gli elementi di un insieme, anche quando questo è infinito [3]. Il numero infinito più significativo è

$$\omega := \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{\mathbb{N}}(k)\ ,$$

che si ottiene sommando tanti "1" quanti sono i numeri naturali. Questo numero è di importanza basilare e, al pari di π o e, merita un simbolo per essere denotato; tale simbolo è appunto ω.

Osservazione 2.4 (Per gli insegnanti) *Il simbolo ω è lo stesso che viene usato per denotare il numero ordinale relativo al tipo d'ordine di ℕ. Questo fatto è voluto in quanto le due nozioni, mediante una teoria più avanzata, possono essere identificate* (vedi [B.4]).

In base a quanto visto, ha senso anche utilizzare la seguente notazione

$$\sum_{k\in E} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cdot \chi_E(k)\ ,$$

per ogni insieme $E \subset \mathbb{N}$.

[*Segue al numero* 219]

Note: [1] Il campo dei numeri euclidei è un campo non archimedeo introdotto recentemente da Marco Forti e da me [B.4]. [2] Il rovescio della medaglia è la dimostrazione della coerenza dell'assiomatica che descrive i numeri euclidei; questa è assai più delicata di quella dei numeri reali e, dal punto di vista fondazionale, presume l'assioma della scelta. [3] Ricordiamo i due principi fondamentali che regolano l'operazione "*contare insiemi finiti*": principio di Hume (o di Cantor) – *Il numero degli elementi di F è uguale al numero degli elementi di G se tra F e G vi è una corrispondenza biunivoca*; principio di Euclide – (5° assioma) *L'intero è maggiore della parte* [B.9]. È ben noto che una teoria che includa numeri capaci di "contare" gli insiemi infiniti, non può rispettare questi due principi contemporaneamente. La teoria cantoriana dei numeri cardinali è stata costruita rinunciando al principio di Euclide, mentre la teoria della numerosità rinuncia al principio di Hume (vedi [B.1, B.2, B.3]). I numeri euclidei portano questo nome, non solo perché sono in corrispondenza biunivoca con la retta euclidea, ma anche perché sono alla base della teoria delle numerosità che rispetta il principio di Euclide.

[*] Professore ordinario di Analisi matematica - Università degli Studi di Pisa – email: vieri.benci@unipi.it

---

EVENTO

Giovedì 17 novembre alla ore 17.00 presso l'Accademia di Agricoltura, Scienze e Lettere di Verona (aula magna), la sezione veronese della Mathesis, in collaborazione con l'Accademia, presenta:

MATEMATICA AL CINEMA, NUMERI IN POESIA

Testi tratti dai libri *Matematiche visioni* di G. Breoni e *Parabole e punti* di L. Corso. L'evento è volto a riannodare il legame tra umanesimo classico e umanesimo scientifico. Contatti: info@mathesisverona.it