ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 219 – Pubblicato il 01 – 12 – 2016

L'analisi infinitesimale mediante i numeri euclidei

Una introduzione elementare

di Vieri Benci [*]

[*Segue dal numero* 218]

Adesso vogliamo mostrare una delle principali differenze tra le somme finite e transfinite. Questa differenza va tenuta presente se vogliamo evitare errori. In una somma finita, si possono traslare gli indici ed il risulto non cambia; questo fatto non vale per le somme transfinite. Vediamo questa cosa in dettaglio: si ha che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_k \quad ove \quad b_k = a_{k-1}$$

ma non è vero che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}^+} b_k \quad ove \quad b_k = a_{k-1}$$

ed $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ è l'insieme dei numeri naturali positivi. Infatti, se assumiamo $a_k = 1$, per ogni k, allora si ha che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{\mathbb{N}}(k) = \omega$$

mentre

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+} b_k = \sum_{k\in\mathbb{N}^+} \chi_{\mathbb{N}}(k) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{\mathbb{N}}(k) - \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{\{0\}}(k) = \omega - 1.$$

D'altra parte questo è un risultato che ci si doveva aspettare in quanto $\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N}$ e dunque, per il principio di Euclide (vedi nota 3), è naturale che sia $n(\mathbb{N}^+) < n(\mathbb{N})$. Dunque, per mantenere la coerenza, dobbiamo sempre ricordare che una somma transfinita è ben definita solo quando si è assegnato un indice naturale ad ognuno dei suoi addendi.

Osservazione 2.5 (Per insegnanti) *Si noti la differenza tra la numerosità di un insieme e la sua cardinalità.* $\mathbb{N}^+$ *e* $\mathbb{N}$ *hanno la stessa cardinalità in quanto possono essere posti in corrispondenza biunivoca, ma non hanno la stessa numerosità in quanto* $\mathbb{N}^+ \subsetneq \mathbb{N}$.

2.3 Numeri infiniti e infinitesimi

Mediante somme transfinite si possono ottenere non solo numeri infiniti quali le numerosità di insiemi infiniti, ma anche infinitesimi; si consideri per esempio la somma transfinita

$$1 - \sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{2^k}.$$

In questo caso, si ha che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{2^n}$$

e dunque in virtù della regola del confronto si ottiene un numero che è maggiore di 0, ma minore di $1/N$ comunque grande si prenda N. In altre parole si ottiene un numero infinitesimo positivo. Tutto ciò è in pieno accordo con la nostra intuizione geometrica della retta euclidea [4]: dimezzando una distanza unitaria infinite volte, si ottiene una distanza infinitesima, ma pur sempre maggiore di 0.

Fino ad adesso, abbiamo parlato di numeri infiniti ed infinitesimi in modo informale; adesso formalizziamo queste nozioni insieme ad altre ad esse collegate.

Definizione 2.6 *Un numero euclideo* $x \in \mathbb{E}$ *si dice infinito (o illimitato) se* $\forall k \in \mathbb{N}$, $|x| > k$. *Un numero* $x \in \mathbb{E}$ *si dice finito (o limitato) se non è infinito, ovvero se* $\exists k \in \mathbb{N}$, $|x| < k$. *Un numero* $x \in \mathbb{E}$ *si dice infinitesimo se* $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $|x| < 1/k$.

In base a queste definizioni dimostriamo che ω è effettivamente un numero infinito. Se $m > n$, si ha che

$$\sum_{k=0}^{m} \chi_{\mathbb{N}}(k) > \sum_{k=0}^{m} \chi_{[0,n]}(k)$$

e dunque dalla regola del confronto segue che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{\mathbb{N}}(k) > \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{[0,n]}(k),$$

pertanto, dalla definizione di ω e applicando la regola delle somme finite deduciamo che $\omega > n$; dunque, per l'arbitrarietà di n, ω è un numero infinito.

Se β è un numero infinito positivo si ha che $\forall n \in \mathbb{N}, \beta > n$. Quindi $1/\beta$ è un numero positivo tale che $(1/\beta) < (1/n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, qualunque sia il numero infinito positivo β, $(1/\beta)$ è un infinitesimo. In particolare, il numero

$$\eta := \frac{1}{\omega} \tag{6}$$

è un infinitesimo. Al pari di "ω", anche il simbolo "η" è una costante che denota un numero ben preciso definito dalla formula precedente. Per quanto visto ω è un numero infinito, ma non è l'unico; infatti anche i numeri $(\omega + 1)$; 7ω; ω^2; $\omega/2$; $(\omega+2)/5$ sono infiniti. Tra i numeri infiniti, si possono distinguere i numeri infiniti positivi e negativi; per esempio, $(\omega - 8)$ è un numero infinito positivo, mentre $(8 - \omega)$ è un numero infinito negativo. È facile verificare che i numeri $5\eta^2$; $7/(\omega - 8)$; 5η; etc. sono infinitesimi. Si osservi che l'unico infinitesimo reale è 0.

Concludiamo il paragrafo con un'altra definizione fondamentale:

Definizione 2.7 *Due numeri euclidei* ξ *e* ζ *si dicono infinitamente vicini se* $\xi - \zeta$ *è un infinitesimo. Se* ξ *e* ζ *sono infinitamente vicini scriveremo* $\xi \sim \zeta$. *Per esempio, il numero* 7 *è infinitamente vicino al numero* $7\omega / (1 + \omega)$.

2.4 Definizione della funzione parte standard

I numeri infinitesimi, in certi problemi "pratici", vanno trascurati. Infatti non possono essere osservati, ovvero si suppone che le grandezze ad essi collegate, sfuggano ad un qualunque strumento di misura. Dunque è importante definire una operazione che permetta di trascurare gli infinitesimi. Illustriamo questa idea con un esempio: si consideri il numero $1/3$. La sua forma decimale è data da $0{,}333\ldots$, ovvero il numero $1/3$ può essere approssimato dalla somma infinita

$$\frac{1}{3} \cong \sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{3}{10^k},$$

ma queste due grandezze saranno esattamente uguali? Se sommiamo i primi n termini si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} = 0,\underbrace{333\ldots33}_{n\ \text{cifre}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n < \frac{1}{3}$$

e dunque per la regola del confronto, si ha che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\frac{3}{10^k}<\frac{1}{3}.$$

D'altra parte, non è difficile vedere che comunque si scelga un numero $A > 0$, sempre usando la regola del confronto,

$$\frac{1}{3}-\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\frac{3}{10^k}<A\,.$$

Pertanto

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\frac{3}{10^k}>\frac{1}{3}-A\ \ e\ dunque\ \ \sum_{k\in\mathbb{N}^+}\frac{3}{10^k}=\frac{1}{3}-\varepsilon\,,$$

ove ε è un opportuno infinitesimo che va trascurato se vogliamo ottenere $1/3$. Dunque, in certi casi, dobbiamo trascurare gli infinitesimi. Per riflettere meglio su questo punto, ricordiamo un esempio classico: il paradosso di Achille e la tartaruga.

Il Pie' Veloce Achille tenta di raggiungere una tartaruga che sta correndo avanti a lui. Pur essendo Achille molto più veloce della tartaruga, seguendo il ragionamento di Zenone, non la raggiungerà mai. Vediamo perché. Achille, che parte dal punto P_0, prima di raggiungere la tartaruga dovrà raggiungere il punto P_1 dal quale essa è partita; ma quando raggiunge tale punto, la tartaruga l'ha lasciato ed è già avanti in un punto P_2. Quindi Achille non l'ha raggiunta. E quando Achille raggiunge P_2, la tartaruga è ancora avanti, avendo raggiunto un nuovo punto P_3 e così via. Questo processo non termina mai, e quindi Achille non raggiunge mai la tartaruga.

La matematica e la logica greca rifuggivano dall'idea di *infinito attuale*, cioè già compiuto ed esistente. Per i greci l'infinito poteva esistere sono come potenzialità (*infinito potenziale*), cioè come possibilità di "aumentare indefinitamente", senza mai "raggiungere" la fine. È chiaro che con queste premesse filosofiche non si poteva certamente venire a capo del paradosso di Zenone. La conclusione che Zenone traeva da questo paradosso (e da altri simili) era che il movimento non esiste: esso è solo un inganno dei sensi.

Vediamo adesso come questo paradosso può essere risolto all'interno della teoria dei numeri euclidei, ed in particolare assumendo l'esistenza di grandezze infinite ed infinitesime. Per raggiungere il punto P_1 supponiamo che Achille debba percorrere una distanza a_0. Durante questo periodo la tartaruga avrà percorso una distanza a_1 e quindi a_1 è la distanza che li separa dopo il primo passo di questo processo. Supponiamo che Achille corra 10 volte più veloce della tartaruga; allora $a_1 = (1/10)\cdot a_0$, in quanto a_1 è la distanza che la tartaruga ha percorso nel tempo in cui Achille ha percorso la distanza a_0. Similmente, quando Achille avrà raggiunto il punto P_1, la distanza che li separa è diventata $a_2 = (1/10)\cdot a_1 = (1/10)^2\cdot a_0$.
In generale, quando Achille avrà raggiunto il punto P_n, si ha

$$a_n=\left(\frac{1}{10}\right)^n a_0\,. \qquad (7)$$

È evidente che ripetendo questo processo un numero finito n di volte Achille non raggiungerà la tartaruga in quanto la loro distanza, espressa dalla (7), è un numero finito maggiore di 0. A questo punto, per concludere che è vero quello che i "nostri sensi" ci mostrano, si possono fare entrare in gioco i numeri illimitati ed infinitesimi. "Ripetendo" questo processo un numero illimitato ω di volte la distanza tra Achille e la tartaruga diventa un numero infinitesimo

$$a_n=\left(\frac{1}{10}\right)^\omega a_0\,. \qquad (8)$$

Dunque, in base alla nostra concezione dei numeri infinitesimi, la distanza tra i due non può più essere percepita né dai nostri sensi, né da qualunque strumento di misura, e quindi si può legittimamente affermare che esiste un punto in cui Achille raggiunge la tartaruga. Però, non abbiamo ancora finito. Infatti si potrebbe obiettare che Achille, dovendo ripetere il processo di avvicinamento un numero infinito ω di volte, deve percorrere una distanza infinita, e può raggiungere la tartaruga soltanto "all'infinito", il che è come dire che non raggiungerà mai la tartaruga. Calcoliamo questa distanza: si ha che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k=a_0\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{10}\right)^k\cong a_0\cdot 1{,}11111\ldots=\frac{10}{9}a_0$$

Pertanto si può concludere che Achille raggiungerà la tartaruga dopo aver percorso i $10/9$ della distanza che li separava inizialmente. Il punto in cui Achille raggiunge la tartaruga è rappresentato dal numero $a_0\sum_{k\in\mathbb{N}}(1/10)^k$ qualora si trascurino gli infinitesimi.

A questo punto si pone la domanda: è sempre vero che infinitamente vicino a un numero euclideo limitato c'è un numero razionale? La risposta è no! Basta pensare a $\sqrt{2}$ e alla somma (1). Ma allora che cosa vuol dire trascurare gli infinitesimi? Per rispondere a quest'ultima domanda abbiamo bisogno del seguente assioma.

Assioma 2.1 (**Assioma della parte standard**) *Esiste una funzione st*: $\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E}$, *chiamata parte standard, tale che*
- *se q è un numero razionale, allora $st(\xi) = q$ se e solo se $\xi\sim q$,*
- $st(st(x)) = st(x)$,
- $st(x + y) = st(x) + st(y)$,
- *se x e y sono limitati, allora $st(xy) = st(x)\cdot st(y)$,*
- *se x è un numero "iperintero", ovvero se x può essere scritto come segue $x=\sum_{k\in\mathbb{N}}n_k$, ove per ogni k, $n_k\in\mathbb{N}$,* allora $st(x) = x$.

Per esempio, utilizzando l'algoritmo della divisione tra polinomi, si ha che

$$\frac{3\omega^2+4}{6\omega^2-\omega}=\frac{1}{2}+\frac{\omega+8}{2\omega(6\omega-1)}\quad\text{per cui}\quad st\left(\frac{3\omega^2+4}{6\omega^2-\omega}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\frac{3\omega^4+4\omega^2+5}{3\omega^2+1}=\omega^2+1+\frac{4}{3\omega^2+1}\quad\text{per cui}$$

$$st\left(\frac{3\omega^4+4\omega^2+5}{3\omega^2+1}\right)=\omega^2+1\,.$$

Si osservi che due numeri hanno la stessa parte standard se e solo se sono infinitamente vicini. Inoltre, questo assioma ci dice che ogni numero limitato ξ può essere scomposto nel seguente modo: $\xi = st(\xi) + [\xi - st(\xi)]$, ove $st(x)$ è limitato e $[\xi - st(\xi)]$ è un infinitesimo; infatti $st[\xi - st(\xi)] = st(\xi) - st(st(\xi)) = 0$.

Osservazione 2.8 (Per gli insegnati) *Chi conosce l'ANS, può rimanere sorpreso che abbiamo definito la parte standard anche per i numeri non limitati. Questa scelta è stata determinata dal fatto che in questo modo ogni funzione risulta derivabile (in senso generalizzato) secondo la definizione 3.2 che vedremo in seguito*.

2.5 I numeri reali

Una importante conseguenza dell'assioma della parte standard sta nel fatto che ci permette di caratterizzare un insieme di numeri "speciali".

Definizione 2.9 *Un numero euclideo x si dice standard se è limitato e se $x = st(x)$. L'insieme dei numeri standard sarà denotato con $\mathbb{R}$ e viene chiamato anche insieme dei **numeri reali**.*

Osservazione 2.10 (Per gli insegnanti) *Ovviamente questa introduzione dei numeri reali è filosoficamente molto lontana da quella tradizionale: i numeri reali vengono presentati come quegli elementi della retta euclidea che sono limitati e a cui abbiamo tolto la parte infinitesima. Da un punto di vista intuitivo, qual è la relazione tra i numeri euclidei e i numeri reali? Poiché le grandezze infinitesime e infinite non possono essere misurate da un normale strumento di misura, possiamo pensare ai numeri reali come a quei numeri che si ottengono da misure fisiche o da opportune manipolazioni di tali misure. Potremmo chiamarli anche **numeri osservabili** invece che numeri standard.*

[*Segue al numero* 220]

Note: [4] Il primo ad aver capito che si poteva avere una geometria non-archimedea coerente è stato Giuseppe Veronese [B.13]. Il suo allievo Tullio Levi-Civita, inoltre, è riuscito ad aritmetizzare la retta non-archimedea di Veronese [B.11].

[*] Professore ordinario di Analisi Matematica - Università degli Studi di Pisa – email: vieri.benci@unipi.it