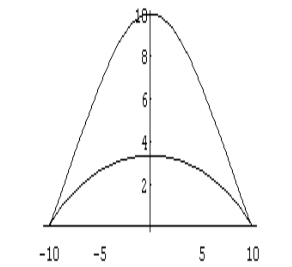
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 22 – ottobre 1999



Probabilità frequentistica e collettivi di Von Mises

di Luciano Corso

Una delle definizioni dirette di probabilità di un evento è quella frequentistica (o statistica). Quando si definisce la probabilità di un certo evento A, dal punto di vista frequentistico, si parte dall'idea che sia possibile eseguire un esperimento in condizioni statisticamente stabili per determinarne la sua misura di probabilità. Si procede in genere così: si considerano 1, 2, …, k, …, r esperimenti distinti (con $r \in \mathbf{N}$); al k-esimo esperimento, si eseguono n_k prove (per esempio si lancia una moneta n_k volte) e si contano le volte $S_{n,k}$ che si è verificato l'evento A che ci interessa (per esempio l'uscita di testa). Si costruisce quindi il rapporto $S_{n,k}/n_k$ che è la frequenza relativa dell'evento considerato. Ci si chiede ora che cosa succederebbe se il k-esimo esperimento, invece di essere costituito da un numero finito di prove n_k, fosse costruito su una sequenza infinita di prove. Questa richiesta, apparentemente semplice e di significato intuitivo risulta invece assai complessa e trova risposte diversificate, non tanto nella sostanza, quanto nell'impostazione teorica. Nascono così diverse impostazioni frequentistiche della probabilità di un evento. Qui prendiamo in considerazione l'impostazione di Von Mises.

Il valore $S_{n,k}$ risulta dalla somma di n_k variabili aleatorie x_{ik} che possono assumere solo due valori: 0 se la prova non dà l'evento A che ci interessa, 1 se lo dà. Consideriamo la successione $\{x_{n,k}\}$ di variabili aleatorie con riferimento all'esperimento k. La successione, nel suo sviluppo tradizionale, si presenta così: x_{1k}, x_{2k}, …, x_{nk}. Tale successione è costituita da finiti termini. Facciamo ora la somma di questi n_k termini della successione:

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^{n_k} x_{i,k}$$

poiché x_{ik} può assumere solo i valori 0 o 1, S_{nk} conta quanto volte si è verificato l'evento A nelle n prove fatte. La frequenza relativa dell'evento A è quindi data da $f_{n,k}=S_{n,k}/n_k$. La $f_{n,k}$ cambia sia al variare di k, sia al variare di n. La frequenza relativa perciò non può essere considerata la probabilità dell'evento A, poiché quest'ultima deve essere un valore costante al variare delle prove. Devono quindi sussistere alcune condizioni. La prima è che il rapporto $S_{n,k}/n_k$ converga ad un valore finito all'aumentare delle prove. Cioè:

$$\lim_{n_k \to \infty} \frac{S_{n,k}}{n_k} = p(A) \qquad \forall k \in N \tag{1}$$

La seconda è centrale per Richard Von Mises (1883-1953). Le successioni che possono essere considerate accettabili per definire la probabilità dell'evento A devono avere le seguenti caratteristiche: devono essere illimitate e devono avere i termini disposti in modo assolutamente casuale rispetto al numero d'ordine. Vengono cioè estromesse tutte quelle sotto successioni che a partire dalla successione illimitata $\{x_k\}$ presentano delle regolarità di uscita dei termini rispetto al numero d'ordine. Quindi non può accadere che estraendo con una certa regola i termini della successione di partenza si possa trovare una probabilità di evento diversa da quella che si troverebbe usando una diversa regola di estrazione (ciò viene detto anche assioma del disordine). A questo tipo di successione Von Mises diede il nome di collettivo. Solo in questo caso si può parlare di probabilità di un evento dal punto di vista frequentistico. Quindi, ricapitolando, le condizioni per essere in presenza di un collettivo – secondo Von Mises – sono:

1) la successione $\{x_{n,k}\}$ deve essere illimitata;
2) il rapporto $S_{n,k}/n_k$ deve convergere a un limite finito, per ogni k;
3) la successione $\{x_{n,k}\}$ non ammette alcuna regolarità rispetto ai suoi indici d'ordine, cioè è interdetta la possibilità di trovare una sotto successione di $\{x_{n,k}\}$ che presenti una qualche regolarità.

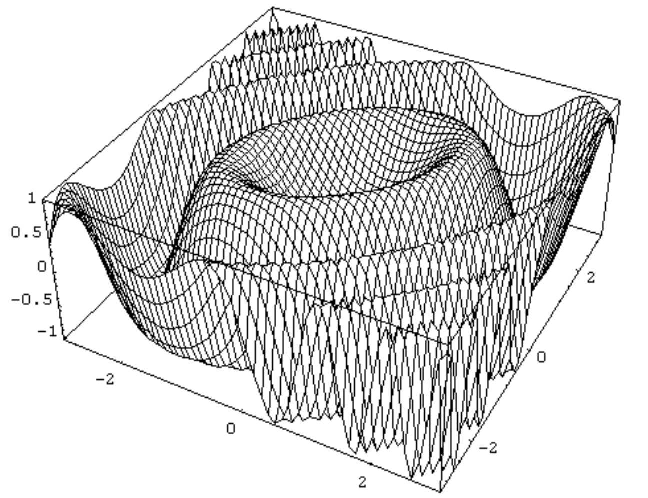
Alla definizione di Von Mises vennero mosse forti critiche; la più significativa sembra essere quella che sottolinea la contraddizione tra il punto 2 e il punto 3: come è possibile, infatti, pensare che una successione ammetta limite finito se essa deve essere assolutamente casuale nella presentazione dei suoi termini rispetto al numero d'ordine? B. V. Gnedenko, per tali ragioni, l'abbandona e la semplifica considerando solo i primi due punti di Von Mises.

La critica più efficace alla definizione frequentistica della probabilità di un evento A, è fatta proprio dagli statistici che considerano vana l'ipotesi di produrre in un esperimento k un numero illimitato di prove ($n_k \to \infty$) per valutare la probabilità di un evento A. In realtà ogni esperimento può essere costituito solo da un numero finito di prove n_k e, per ogni k, si otterrà normalmente un rapporto tra numero di volte che si è verificato A ed il totale delle prove fatte che sarà determinato da una frequenza relativa $S_{n,k}/n_k$. Per gli statistici deve essere garantita solo una certa stazionarietà nei risultati, nel senso che sono accettabili quelle frequenze relative che scaturiscono da esperimenti basati su grandi numeri di prove e che differiscono tra di loro di un valore relativamente piccolo (tale relatività va precisata di volta in volta). Un'altra critica riguarda la stabilità delle condizioni sperimentali (già citata sopra); essa infatti, nella maggior parte delle volte, si ottiene solo difficilmente. Per queste ragioni la definizione di probabilità di un evento assume il significato di frequenza relativa, che però manca di oggettività, nel senso che, al variare di k, si avranno diverse $f_{n,k}$. Per salvare l'oggettività della misura, si è pensato di ricorrere al concetto di stima. Le frequenze relative $f_{n,k}$ sono tutte stime di un ipotetico valore finito che misura la probabilità dell'evento A e che si conviene esista.

Bibliografia: G. Landenna, D. Marasini, P. Ferrari. "*Probabilità e variabili casuali*", Il Mulino, 1997, Bologna – Da quaderni di Le Scienze, D. Costantini, "*Caso, Probabilità e statistica*", 1994, Milano – B. De Finetti, *Filosofia della probabilità*, Il Saggiatore, Milano, 1995

Rinunciare al sapere

Al congresso nazionale Mathesis di Teramo tra i vari spunti culturali e didattici proposti dai diversi relatori ve ne sono stati alcuni che davvero meriterebbero una cornice speciale. Un passaggio interessante è stato quello di Bruno D'Amore. Dopo aver presentato le difficoltà che incontrano gli insegnanti nel loro difficile rapporto con gli allievi, ha aggiunto che i docenti devono far capire agli studenti l'importanza di conoscere approfonditamente e criticamente i concetti della matematica, piuttosto che assegnare loro meccanicismi simbolici. Egli ha sottolineato che "[…] C'è un momento della vita di ogni studente in cui egli rinuncia al sapere e si affida all'istituzione (la scuola, gli insegnanti). Questo è un momento critico (normalmente avviene alle elementari, ma spesso anche alle superiori). Quando si sente dire:" Cosa ti ha chiesto il professore?" e poi "E tu, cosa hai risposto?" e mai invece "Che voleva che si sapesse?" e "Noi quanto sappiamo?" si comprende questo distacco. Poi non ci si deve stupire se un maestro che chiede a scuola all'allievo "Un pastore ha 12 pecore e 6 capre; quanti anni ha il pastore? " si trova un ragazzo pronto a rispondere 18! Ma se la stessa domanda la si pone al giovane fuori dalla scuola, egli risponde "Tu sei matto!" […].



Un mostro a tre dimensioni

La figura risponde alla seguente equazione: $z=sen(x^2+y^2-x\cdot y)$ calcolata nel dominio $\{x: -3 \le x \le 3\} \otimes \{y: -3 \le y \le 3\}$. È stata tracciata con il programma MATHEMATICA della Wolfram Research.

Il fascino del calcolo matriciale:
la rotazione rigida in S_3

di Arnaldo Vicentini

[2^a parte, Segue dal n. 21] Nella prima parte abbiamo rilevato che, posto

$$G_u = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

se $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, per ogni n naturale risulta:

$$G_u^{2n+1} = (-1)^n G_u \;;\; G_u^{2(n+1)} = (-1)^n G_u^2 \;; \qquad (2)$$

e che, posto $V=[x,y,z]^T$, la trasformazione $V'=G_uV$ rappresenta il prodotto vettoriale tra il vettore rappresentato da $[\alpha,\beta,\gamma]$ e quello rappresentato da V. L'interpretazione geometrica di G_u ci aveva consentito di stabilire che la rotazione rigida di angolo φ e asse r per l'origine O e per il punto $U=(\alpha,\beta,\gamma)$ distante 1 da O è rappresentata dalla matrice:

$$R_u(\varphi) = I + \sin\varphi\, G_u + (1-\cos\varphi) G_u^2 \,. \qquad (3)$$

Si calcoli ora $R_u(\varphi_1)R_u(\varphi_2)$ adoperando la (3) e si tenga presente che, in base a (2), G_u^3 vale $-G_u$ e G_u^4 vale $-G_u^2$: si trova $R_u(\varphi_1)R_u(\varphi_2)=R_u(\varphi_1+\varphi_2)$; e tanto basta per affermare che $R_u(\varphi)$ è esponenziale in φ, ossia del tipo $Exp(\varphi A_u)$, dove A_u è una matrice (di Bashkov) dipendente da $\boldsymbol{u}$ ma non da φ. Questa si calcola come derivata di $Exp(\varphi A_u)$ in $\varphi=0$. Dalla (3) si scopre allora che la A_u di $R_u(\varphi)$ è proprio G_u. In effetti, per una rotazione infinitesima $d\varphi$, il punto $V'=R_uV$ distante $m=|u\times v|$ dall'asse r di rotazione si sposta di $md\varphi$ nel verso di $u\times v$; ossia:

$d(R_uV)=d\varphi G_u(R_uV) \Rightarrow dR_u/d\varphi=G_uR_u \Rightarrow R_u=Exp(\varphi G_u)$

Sviluppando allora $Exp(\varphi G_u)$ in serie di potenze e tenendo conto della (2) si trova:

$Exp(\varphi G_u)=$

$$= I + \varphi G_u + \frac{\varphi^2}{2!}G_u^2 - \frac{\varphi^3}{3!}G_u - \frac{\varphi^4}{4!}G_u^2 + \frac{\varphi^5}{5!}G_u \ldots =$$

$$= I + \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right)G_u + \left[1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right)\right]G_u^2$$

$$Exp(\varphi G_u) = I + \sin\varphi\, G_u + (1-\cos\varphi)G_u^2 \,. \qquad (4)$$

Abbiamo ritrovato la (3) per pura via analitica! Ancora dalla (3), essendo G_u antisimmetrica (cioè $G_u^T=-G_u$) e G_u^2 simmetrica (cioè $(G_u^2)^T=G_u^2$) abbiamo:

$$R_u(\varphi)^T = I - \sin\varphi\, G_u + (1-\cos\varphi)G_u^2 = R_u(-\varphi) \,. \qquad (5)$$

Vuoi perché $R_u(\varphi)$ è esponenziale, vuoi verificando sulla (3) che

$$R_u(\varphi)^T R_u(\varphi) = R_u(\varphi) R_u(\varphi)^T = I \,,$$

si ha

$$R_u(\varphi)^T = R_u^{-1}(\varphi) \,. \qquad (6)$$

L'uguaglianza tra la trasposta e l'inversa della stessa matrice quadrata sussiste se e solo se la matrice (o la sua trasposta) rappresenta una base ortonormale, cioè se:

- ogni vettore riga ed ogni vettore colonna è un versore;
- ogni vettore riga è ortogonale ad ogni altro ed ogni vettore colonna è ortogonale ad ogni altro.

Questa proprietà, caratteristica di ogni matrice che rappresenti una isometria, deriva immediatamente dalla definizione stessa di isometria (che significa conservazione delle distanze). Allora, infatti, il prodotto scalare di due arbitrari vettori ***u*** **e** ***v*** deve uguagliare comunque il prodotto scalare dei rispettivi trasformati ***u'***, ***v'***. Sia B rappresentante una base e sia B'=MB rappresentante la base trasformata dalla isometria rappresentata da M. Risulta allora:

$B^TB=B'^TB' \Leftrightarrow B^TB=(MB)^T(MB) \Leftrightarrow B^TB=B^T(M^TM)B \Rightarrow$

$\Rightarrow M^TM=I=MM^T$ (7)

Essendo anche $det(M^T)=det(M)$ e $det(M^{-1})=1/det(M)$, deve essere $det(M)=\pm 1$. Se il determinante vale *1* l'isometria è detta diretta, altrimenti (cioè se $det(M)=-1$) inversa. Se M rappresenta una isometria, tutti i suoi autovalori - zeri del polinomio caratteristico $P(\lambda)=det(M-\lambda I)$ – hanno modulo *1*. In S_3 o sono tutti reali di valore ± 1 (e allora due almeno sono uguali) oppure due sono complesso coniugati (con prodotto *1*) e il terzo è reale e vale *1* se l'isometria è diretta, *-1* se è inversa. Dunque in S_3, un'isometria diretta rappresentata da M deve avere almeno un autovalore uguale a *1* e quindi uniti tutti i punti di una retta per l'origine: perciò è una rotazione di un certo angolo φ attorno ad un asse: appunto come $R_u(\varphi)$. In particolare $R_u(2k\pi)$ è l'identità stessa per qualsiasi ***u*** mentre $R_u[(2k+1)\pi]$ dà la simmetria (cioè $R_u^2=I$) assiale ortogonale rispetto all'asse per *O* e diretto come ***u***.

Dal consiglio nazionale di Teramo (stralci)

[…] La Mathesis ha raggiunto i 3.600 soci; è così diventata la prima associazione italiana di categoria. […] Sono in fase di stampa gli Atti del congresso nazionale de L'Aquila del 1998 e – finalmente – anche quelli di Caserta del 1997. […] Si sta, inoltre, stampando una memoria dei consiglieri nazionali uscenti – un volume di 11 relazioni di diversa natura sulla didattica e la cultura matematica. […] È, infine, in fase di studio una ricerca storica sulle origini e sullo sviluppo dei vari argomenti della matematica trattati nei diversi corsi di studio delle scuole medie superiori (algebra, analisi, geometria, calcolo delle probabilità, ecc.). L'obiettivo del lavoro è quello di dare ai docenti di matematica pura ed applicata un'informazione storica sugli argomenti che dovranno poi sviluppare in classe nel corso dell'anno scolastico, così da consentire agli studenti di comprendere meglio le parti proposte anche grazie ad una propedeutica storica ed epistemologica delle varie teorie matematiche. […] L'iniziativa "Il teorema più bello" avrà l'epigono nel prossimo congresso nazionale del 2000; i soci presenti insieme agli esperti, voteranno uno dei teoremi proposti.