ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 220 – Pubblicato il 02 – 01 – 2017

L'analisi infinitesimale mediante i numeri euclidei

Una introduzione elementare

di Vieri Benci [*]

[*Segue dal numero* 219]

A questo punto si potrebbe essere tentati di pensare che gli altri numeri euclidei non esistano o che comunque siano numeri inutili. Non discuteremo la nozione di esistenza e di non esistenza di enti matematici: questa discussione è troppo impegnativa dal punto di vista filosofico e ci porterebbe lontano. Osserviamo invece che anche i numeri euclidei non-standard descrivono certe grandezze al pari dei numeri reali. Per esempio, l'ampiezza di un angolo di contingenza non può essere misurata mediante un goniometro, ma è una grandezza altrettanto reale dell'ampiezza di un angolo usuale. In ogni caso l'utilità dei numeri euclidei si rivela nello sviluppo dell'analisi infinitesimale e soprattutto nella loro capacità di costruire modelli della realtà fisica.

In virtù della definizione 2.9 i numeri razionali sono reali; i numeri reali che non sono razionali vengono chiamati *irrazionali*. In genere, lo studente incontra per la prima volta i numeri reali mediante la seguente rappresentazione decimale $r = a_0, a_1a_2a_3a_4\ldots$, ove a_0 è un numero intero e gli a_k sono cifre decimali.

Adesso, mediante la nozione di somma transfinita e di parte standard, possiamo dare un significato rigoroso a questa rappresentazione, ovvero

$$r = st\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{10^k}\right);$$

dunque il simbolo $a_0, a_1a_2a_3a_4\ldots$ rappresenta una somma transfinita nella quale si trascura la parte infinitesima.

Osservazione 2.11 *Avendo introdotto i numeri reali diventa necessario stabilire che la regola del confronto vale non solo per i numeri razionali, ma anche per i reali*.

Osservazione 2.12 (Per gli insegnanti) *La domanda che si pone adesso in modo naturale è la seguente: quale tra i due insiemi numerici $\mathbb{E}$ e $\mathbb{R}$ rappresenta meglio l'idea intuitiva di continuo geometrico? Per una discussione su questo punto si rimanda a* [B.5].

2.6 Rappresentazione dei numeri euclidei

Sia data una successione di numeri euclidei, ovvero una funzione φ: $\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{E}$. Poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha che

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n-1}[\varphi(k+1) - \varphi(k)] + \varphi(0)$$

Risulta naturale denotare il numero $\sum_{k\in\mathbb{N}}[\varphi(k+1) - \varphi(k)] + \varphi(0)$ col simbolo $\varphi(\omega)$, ovvero usare la notazione

$$\varphi(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}}[\varphi(k+1) - \varphi(k)] + \varphi(0) \qquad (9)$$

Similmente, data una somma transfinita di numeri euclidei $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$, possiamo definire una successione di numeri euclidei (chiamata funzione enumeratrice) nel seguente modo

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Chiaramente, in virtù della (9), si ha che

$$\varphi(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\,.$$

Per esempio, $\omega!$ è il numero che si ottiene dalla somma transfinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}[(k+1)! - k!] + 0! = 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} k\cdot k!$$

in quanto

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)! - \mathrm{k}!] + 0! = n!$$

Dunque, ogni numero euclideo può essere rappresentato da un'espressione del tipo $\varphi(\omega)$ ove $\varphi(n)$ è una espressione che ha senso per un n sufficientemente grande. Ovviamente $\varphi(\omega)$ è una possibile rappresentazione di un numero euclideo.

3 Calcolo infinitesimale euclideo

In questa sezione svilupperemo il calcolo infinitesimale facendo appello alla intuizione della retta euclidea. In particolare definiremo l'integrale mediante la nozione di area.

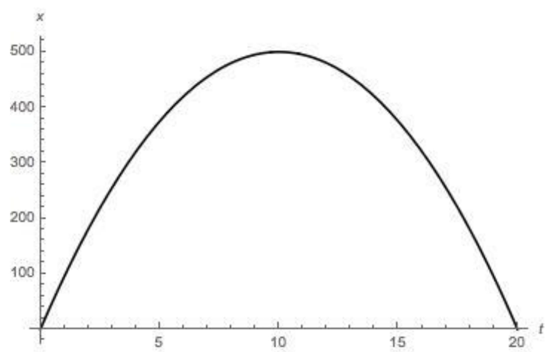
3.1 Il concetto di velocità istantanea

Ci proponiamo di definire la velocità a un dato istante di un punto materiale mobile del quale conosciamo l'equazione oraria (cioè conosciamo la sua posizione come funzione del tempo). Anche se abbiamo un'idea intuitiva di velocità, questa non ci consente di risolvere neppure i problemi più elementari come quelli che considereremo adesso senza usare, in maniera più o meno esplicita, grandezze infinitesime.

Per esporre la problematica nel modo più semplice possibile consideriamo un caso particolare. Supponiamo che un cannone spari all'istante $t = 0$ una palla verso l'alto in direzione verticale. Com'è noto, se x è l'altezza dal suolo del proiettile, l'equazione del moto (trascurando la resistenza dell'aria) è la seguente:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,, \qquad (10)$$

dove g è l'accelerazione di gravità e v_0 è la velocità iniziale. Si osservi che nel nostro discorso non ha ancora un senso preciso la locuzione "velocità iniziale" (e tanto meno "accelerazione di gravità"), per cui le costanti g e v_0 non sono altro che due numeri dati ricavati, per esempio, da un apparato sperimentale di misura (Nella figura si è posto $v_0 = 100\ m/s$ e $g = 10\ m/s^2$).



$x = 100\,t - 5\,t^2$

Ci poniamo le seguenti domande:

• (a) Qual è la velocità iniziale del proiettile ?

• (b) Quale velocità avrà il proiettile all'istante in cui ricade al suolo?
• (c) Esiste un momento in cui la velocità si annulla?
Per rispondere alle tre domande precedenti è evidente che occorre avere un concetto preciso di quello che si intende per velocità a un dato istante, mentre il concetto di velocità che abbiamo è quello di velocità media, dato dal rapporto tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo. Ad esempio, la velocità media del nostro punto mobile fra l'istante t_0 e t_1 sarà:

$$v_m(t_0, t_1) = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = v_0 - \frac{1}{2} g \cdot (t_0 + t_1)\,. \tag{11}$$

Fintanto che si concepisce la velocità come rapporto tra due numeri reali non potremo che calcolare la velocità media. Infatti affinché il rapporto (11) abbia senso, l'intervallo di tempo $t_1 - t_0$ deve essere diverso da 0. Quindi non sembra possibile rispondere alle tre domande che ci siamo posti in quanto esse presuppongono il concetto di velocità istantanea del quale, pur tuttavia, abbiamo un'idea intuitiva (che ci siamo fatti guardando, per esempio, il tachimetro di un'automobile).

Adesso, vedremo che ricorrendo ai numeri infinitesimi questi problemi possono essere risolti facilmente. Se ammettiamo l'esistenza di numeri (e quindi di tempi) infinitesimi possiamo definire la velocità all'istante t, come la velocità media del nostro mobile tra i punti t_0 e t_1 quando $[t_0, t_1]$ è un intervallo infinitesimo centrato nel punto t. Dunque prendiamo $t_1 = t + \eta/2$ e $t_0 = t - \eta/2$. Sostituendo questo valore nella (11) si ottiene $v_m(t_0, t_1) = v_0 - g\,t$. La velocità media in un intervallo infinitesimo sembra dunque un buon candidato per la velocità istantanea. Ma non sempre la velocità media in un intervallo infinitesimo è un numero standard; per esempio, se prendiamo $x(t) = t^3$, si ha che

$$v_m(t_0, t_1) = \frac{\left(t + \frac{\eta}{2}\right)^3 - \left(t - \frac{\eta}{2}\right)^3}{\eta} = 3t^2 + \frac{1}{4}\eta^2\,.$$

D'altra parte, quando torniamo all'interpretazione fisica del fenomeno che vogliamo descrivere, possiamo trascurare le quantità infinitamente piccole in quanto non le possiamo misurare. Quindi sembra ragionevole definire la velocità all'istante t mediante la definizione seguente.

Definizione 3.1 *La velocità istantanea all'istante t è data dalla velocità media nell'intervallo infinitesimo* $[t - \eta/2, t + \eta/2]$, *quando si trascurino quantità infinitamente piccole.*

Adesso possiamo risolvere i tre problemi che ci siamo posti all'inizio del paragrafo. La velocità iniziale è $v(0) = v_0$, la velocità all'istante finale $\hat{t} = 2v_0/g$ è $v(\hat{t}) = v(2v_0/g) = -v_0$. Inoltre, si può vedere che esiste un istante in cui il punto mobile ha velocità nulla risolvendo l'equazione $v(t) = 0$ che ha soluzione $t = v_0/g$. Il problema della definizione di velocità istantanea dal punto di vista puramente matematico coincide col calcolo della derivata che esporremo nei paragrafi seguenti.

3.2 La derivazione

Definizione 3.2 *Data una funzione* $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{E}$, $(a, b) \subset \mathbb{E}$, *e un punto* $x_0 \in (a, b) \cap \mathbb{R}$, *si pone*

$$Df(x_0) = st\left(\frac{f\left(x_0 + \frac{\eta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\eta}{2}\right)}{\eta}\right) \tag{12}$$

ove $\eta := 1/\omega$.

Osservazione 3.3 (Per gli insegnanti) *Si osservi che la definizione di derivata data qui non è equivalente all'usuale definizione. La definizione equivalente all'usuale nel mondo euclideo sarebbe la seguente: f è derivabile nel punto x_0 se*

$$st\left(\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}\right)$$

non dipende dall'infinitesimo $\varepsilon \neq 0$. *Avendo a disposizione il numero* η, *possiamo dare la definizione* (12) *che è certamente più semplice. Come vedremo in seguito, le due definizioni coincidono quando la funzione derivata è continua. Poiché i teoremi più significativi valgono per funzioni* C^1 *e comunque gran parte dell'analisi ignora le funzioni con derivata discontinua, la semplificazione data dalla definizione* (12) *mi sembra accettabile.*

Come primo esempio di derivata il lettore e consideri il calcolo della velocità esposto nel paragrafo precedente. Vediamo un altro esempio: sia $f(x) = 1/x$; e sia x_0 un numero reale, allora

$$Df(x_0) = st\left(\frac{\frac{1}{x_0 + \eta/2} - \frac{1}{x_0 - \eta/2}}{\eta}\right) = st\left(\frac{-\eta}{\eta(x_0^2 - \eta^2/4)}\right) \tag{13}$$

$$= st\left(\frac{-1}{x_0^2 - \eta^2/4}\right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Così com'è definito, $Df(x_0)$ è un numero, ma se consideriamo x_0 come variabile si ha che $Df(x_0)$ è una funzione razionale con coefficienti reali. $Df(x_0)$, che a priori è definita solo per $x_0 \in \mathbb{R}$, in realtà può essere definita per ogni $x \in \mathbb{E}$ semplicemente usando la stessa espressione algebrica. Questa osservazione ci porta alla nozione di funzione derivata, ma prima ci occorre la nozione di funzione standard.

3.3 Le funzioni standard

Nella sezione 2.5 abbiamo introdotto la nozione di numero standard. Intuitivamente i numeri standard sono i numeri *osservabili* o costruibili mediante essi con operazioni finitistiche (ovvero senza somme infinite). Similmente, nello stesso ordine di idee, possiamo definire le funzioni standard.

Definizione 3.4 (non formalizzata) *Una funzione si dice standard se può essere costruita utilizzando numeri standard e le operazioni dell'analisi definibili senza ricorrere a somme infinite.*

In particolare si ha che:
- una funzione costante $x \mapsto a$ è standard se e solo se a è un numero standard;
- se f e g sono standard, anche $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, f^{-1}, $\max(f(x), g(x))$ sono standard;
- se a e b sono punti standard, allora la funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}$ è standard;
- e^x e $\log x$ sono standard;
- $\sin x$ e $\cos x$ sono standard.

Come esempio di funzioni non standard consideriamo

$$st(x), \quad \frac{1}{x + \omega}, \quad \sin(\omega^2 x), \quad \chi_{[0,\omega]}, \quad etc.$$

Osservazione 3.5 (Per gli insegnanti) *Una definizione rigorosa di funzione standard, è la seguente*:

Definizione 3.6 *Una funzione euclidea* $f\colon (a, b) \to \mathbb{E}$ *si dice standard, se*
- $a, b \in \mathbb{R}$,
- $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$,
- *comunque si scelga una successione* $\varphi\colon \mathbb{N} \to (a, b)$ *risulta che* $f(\varphi(\omega)) = (f \circ \varphi)(\omega)$
  ove i numeri $\varphi(\omega)$ *e* $(f \circ \varphi)(\omega)$ *sono definiti dalla* (9).

Una tale definizione non è difficile da capire, ma risulta delicato dimostrare, partendo da questa definizione, che le "funzioni usuali" sono standard per cui, a un primo approccio, la definizione 3.4 mi sembra preferibile.

3.4 La funzione derivata

Definizione 3.7 *Sia data una funzione* $f\colon (a, b) \to \mathbb{E}$, $(a, b) \subseteq \mathbb{E}$. *f si dice derivabile nell'intervallo* (a, b) *se esiste una funzione* ***standard*** $f'(a, b) \to \mathbb{E}$ *tale che per ogni punto standard* $x_0 \in (a, b)$ *risulta che* $f'(x_0) = Df(x_0)$.
La funzione f' si chiama funzione derivata della f.
[*Segue al numero* 221]

[*] Professore ordinario di Analisi Matematica - Università degli Studi di Pisa – email: vieri.benci@unipi.it