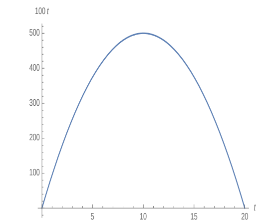
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesisverona.it – Stampa in proprio – Numero 221 – Pubblicato il 03 – 02 – 2017



L'analisi infinitesimale mediante i numeri euclidei

Una introduzione elementare

di Vieri Benci [*]

[*Segue dal numero* 220]

Per esempio, se $f(x) = 1/x$, dalla (13) segue che $f'(x) = -1/x^2$. Vediamo un altro esempio: sia

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x+2}\ ;$$

allora

$$\begin{aligned} Df(x_0) &= st\left[\frac{1}{\eta}\left(\frac{2(x_0+\eta/2)^2+3}{(x_0+\eta/2)+2} - \frac{2(x_0-\eta/2)^2+3}{(x_0-\eta/2)+2}\right)\right] \\ &= st\left[\frac{8x_0^2+32x_0-12-2\eta^2}{4x_0^2+16x_0+16-\eta^2}\right] = \frac{8x_0^2+32x_0-12}{4x_0^2+16x_0+16} \\ &= \frac{8x_0+2x_0^2-3}{(x_0+2)^2} \end{aligned}$$

e dunque

$$f'(x) = \frac{8x_0+2x_0^2-3}{(x_0+2)^2}.$$

Si osservi che l'uguaglianza $f'(x) = Df(x)$ ha senso per x standard e vale solo se la funzione f è derivabile in un intervallo (a, b) contenente x.

Osservazione 3.8 (Per gli insegnanti) *Si osservi che anche la funzione derivata non coincide con la funzione derivata dell'analisi usuale. Per esempio, la funzione derivata di $|x|$ è ben definita e nel punto 0 vale 0.*

Mentre la derivata in un punto è sempre definita, l'esistenza della "funzione derivata" è una questione più delicata. Vediamo un esempio di una funzione che non è derivabile in tutto $\mathbb{R}$: sia

$$H(x) = \begin{cases} 1 & se\quad x \geq 0 \\ 0 & se\quad x < 0 \end{cases}$$

In questo caso si ha che

$$DH(0) = \frac{1-0}{\eta} = \omega.$$

Dunque $H(x)$ non è derivabile in alcun intervallo contenente lo 0 anche se $DH(x)$ è un numero ben definito per ogni $x \in \mathbb{E}$.

Osservazione 3.9 (Per gli insegnanti) *Farsi un'idea della delta di Dirac con qualche anno di anticipo, certamente non è male.*

3.5 L'integrale

In questa sezione definiremo la nozione di integrale in modo intuitivo basandosi sulla sua interpretazione geometrica. Data una funzione $f: I \to \mathbb{E}$ possiamo scomporla nella sua parte positiva e negativa nel seguente modo $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, ove $f^+(x) = \max(f(x), 0)$; $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.

Definizione 3.10 *Sia $[a, b] \subset \mathbb{E}$ un intervallo e sia $f: [a, b] \to \mathbb{E}$ una funzione positiva. Si chiame integrale di f l'area dell'insieme*

$$I = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

e si denota col simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx\ ;$$

se $f: [a, b] \to \mathbb{E}$ è una funzione qualsiasi, l'integrale della f si definisce come segue:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx.$$

Il teorema seguente illustra alcune proprietà dell'integrale definito la cui validità può essere dedotta direttamente dall'interpretazione geometrica:

Teorema 3.11 *Siano f e g due funzioni definite in $[a, b]$; allora si ha*

(i) *se $c \in [a, b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,;$$

(ii) *se $f(x) \leq g(x)$ sono definite in $[a, b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,;$$

(iii) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,;$$

(iv) *supponiamo che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, allora si ha*

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$$

(v) *se $f(x)$ e $g(x)$ sono definite in $[a, b]$, allora*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dimostrazione. I punti (i), ... (iv) discendono immediatamente dalla interpretazione geometrica. Il punto (v) si può fare seguire dal principio di Cavalieri che per quanto concerne noi può essere enunciato nel seguente modo:

Principio di Cavalieri: Siano A e B due figure piane e sia $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ un fascio di rette parallele che ricopre il piano. Allora se per ogni $r \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, la lunghezza di $A \cap r$ è uguale alla lunghezza di $B \cap r$, si ha che l'area di A è uguale all'area di B. Per dimostrare (v), nel caso in cui siano $f(x)$, $g(x) \geq 0$, basta prendere

$A = \{(x, y) | x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x)\}$

$B = \{(x, y) | x \in [a, b], f(x) \leq y \leq f(x) + g(x)\}$

e per $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ l'insieme delle rette parallele all'asse delle ordinate.

3.6 Teorema fondamentale del calcolo

Adesso ci serve generalizzare la nozione di integrale anche nel caso in cui sia $b \leq a$.

Definizione 3.12 Sia f una funzione definita in un intervallo I e siano $a, b \in I$ due numeri euclidei.

Se $a = b$ si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,.$$

Se $b < a$ si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Introduciamo il concetto di funzione integrale. Sia f una funzione definita in un intervallo I e siano $a \in I$ un numero fissato. Allora si definisce una funzione $F: I \to \mathbb{E}$ nel seguente modo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt\,. \tag{14}$$

Si osservi che se a è un numero standard e se f e una funzione standard, allora per la definizione (3.4) $F(x)$ è una funzione standard.

Definizione 3.13 *Sia f una funzione standard definita in un intervallo I e sia $x_0 \in I$ un numero standard; si dice che f è continua nel punto x_0 se per ogni infinitesimo ε*

$f(x_0+\varepsilon) \sim f(x_0)$. [5]

Si ha il seguente lemma:

Lemma 3.14 *Sia f una funzione standard definita in un intervallo I continua in $x_0 \in I$; allora, se F è la funzione definita dalla* (14), *si ha $DF(x_0) = f(x_0)$.*

Dimostrazione. Si ha che

$$DF(x_0) = st\left(\frac{F(x_0+\eta/2) - F(x_0-\eta/2)}{\eta}\right)$$

$$= st\left[\frac{1}{\eta}\left(\int_a^{x_0+\eta/2} f(t)\,dt - \int_a^{x_0-\eta/2} f(t)dt\right)\right]$$

$$= st\left[\frac{1}{\eta}\int_{x_0-\eta/2}^{x_0+\eta/2} f(t)\,dt\right] = st\left[\frac{1}{\eta}\int_{x_0-\eta/2}^{x_0+\eta/2} [f(x_0)+h(t)]\,dt\right]$$

ove si è posto $h(x) = f(x) - f(x_0)$.

Dato che $f(x)$ è continua, risulta che $\forall x \sim x_0, \forall a \in \mathbf{Q}^+, |h(x)| < a$. Per cui

$$F'(x_0) = st\left[\frac{1}{\eta}\int_{x_0-\eta/2}^{x_0+\eta/2} [f(x_0)+h(t)]\,dt\right]$$

$$= st\left[\frac{1}{\eta}\int_{x_0-\eta/2}^{x_0+\eta/2} f(x_0)\,dt + \frac{1}{\eta}\int_{x_0-\eta/2}^{x_0+\eta/2} h(t)\,dt\right]$$

$$= f(x_0) + st\left[\frac{1}{\eta}\int_{x_0-\eta/2}^{x_0+\eta/2} h(t)\,dt\right]$$

D'altra parte

$$\left|\frac{1}{\eta}\int_{x_0-\eta/2}^{x_0+\eta/2} h(t)\,dt\right| \le \frac{1}{\eta}\int_{x_0-\eta/2}^{x_0+\eta/2} |h(t)|\,dt \le a$$

Dall'arbitrarietà di $a \in \mathbf{Q}^+$ segue che questo termine è infinitesimo da cui la tesi.

Si dice primitiva di una funzione standard f una funzione F che risolve la seguente equazione: $F' = f$.

Teorema 3.15 (Teorema fondamentale del calcolo) *Ogni funzione standard f continua in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, ha una primitiva che è data da*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{15}$$

ove $a \in I$ è un numero reale arbitrario.

Dimostrazione. Discende immediatamente dal lemma precedente. [*Segue al numero* 222]

Note: [5] Il simbolo « ~ » (tilde) sta per "… è infinitamente vicino a …". Con lo stesso significato, nella pubblicistica internazionale si trova anche il simbolo « ≈ », usato dal Keisler et al. e anche in MatematicaMente (ISSN: 2037-6367) nn. 205, 207, 210, 211, 216, 217.

[*] Professore ordinario di Analisi Matematica - Università degli Studi di Pisa – email: vieri.benci@unipi.it

Che cos'è un processo stocastico

(*di Luciano Corso*) Per processo stocastico s'intende una funzione di due variabili $\{X_t(\omega), t \in T\}$, definita su $\mathbb{R}^n\ \forall n$ o anche su un qualsiasi spazio funzionale misurabile, dove $X(\omega)$ è una variabile aleatoria (in seguito v.a.) i cui valori dipendono dagli eventi $\omega \in \Omega$ (Ω è lo spazio campionario degli eventi elementari possibili appartenente allo spazio di probabilità $\{\Omega, \Phi, P\}$) e t è un parametro operativo deterministico generalmente identificato con il tempo (discreto o continuo). Se consideriamo t come indicatore sequenziale di risultati, allora un processo stocastico si presenta come una famiglia ordinata di v.a. finita o infinita e, in quest'ultimo caso, è una successione di v. a. $(X_t(\omega))$ dipendenti da t. Siccome ognuna di esse ha associata una distribuzione di probabilità, per conoscere un processo stocastico dal punto di vista probabilistico occorre sapere la distribuzione congiunta delle probabilità associate alle singole v. a.; cioè:

$$P(X_{t1} \le x_1 \cap X_{t2} \le x_2 \cap \dots \cap X_{tn} \le x_n) = F_{t1,\,t2,\,\dots,\,tn}(x_1, x_2, \dots, x_n)\,, \tag{1}$$

dove le x_k sono le determinazioni (o realizzazioni) di X_{tk}, $\forall k$. Se n è finito, allora la famiglia di v.a. è finita e la successione è troncata; altrimenti la famiglia è infinita. La relazione (1) dà la funzione di ripartizione congiunta del processo e descrive il comportamento probabilistico dello stesso.

Facciamo un esempio elementare per capire la differenza tra v.a. e processo stocastico. Se lancio una moneta $n = 5$ volte e sono interessato alla probabilità che escano $x = 3$ teste ("esce testa" =1, "esce croce" =0), mi trovo di fronte a una v.a. x che dipende dall'evento composto $A = \{00111 \cup 01011 \cup 01101 \cup 01110 \cup 10011 \cup 10101 \cup 10110 \cup 11001 \cup 11010 \cup 11100\}$ di eventi elementari di Ω. La probabilità che esca $x = 3$ è $P(x{=}3) = 10\,/\,32$. Qui l'analisi è solo di natura probabilistica: questo non è un processo stocastico. Se invece sono interessato, sempre in $n = 5$ lanci di moneta, a verificare la sequenza temporale dei risultati, allora le cose cambiano. Abbiamo, infatti:

- una sequenza troncata di v.a. $X_t(\omega)$ che possono assumere solo due valori in ogni lancio (o 0 o 1);
- un indicatore temporale t (parametro operativo in questo caso discreto) che ordina gli esiti dei lanci e quindi le v.a. che danno origine a questi risultati.

In questo secondo caso, abbiamo: $t{=}1 \Rightarrow x_1(\omega)$, $t{=}2 \Rightarrow x_2(\omega)$, $t{=}3 \Rightarrow x_3(\omega)$, $t{=}4 \Rightarrow x_4(\omega)$, $t{=}5 \Rightarrow x_5(\omega)$, dove, per ogni t,

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0 & se \quad \neg\omega = croce \quad con\ probabilità\ q \\ 1 & se \quad \omega = testa \quad con\ probabilità\ p\,. \end{cases}$$

Così, la successione 10101 non viene più vista come numero di teste in 5 lanci, ma come sequenza di risultati (quindi risultati ordinati) di numeri provenienti da una successione di v.a. di tipo dicotomico con sequenza di probabilità $pqpqp$: siamo in presenza di un processo stocastico finito. Le variabili $X_t(\omega)$ possono essere statisticamente indipendenti e identicamente distribuite (in simboli: *i.i.d.*), come in questo caso; possono, però, anche avere una qualunque altra natura.

Un secondo esempio è il seguente. Siamo in un casello autostradale. Siamo interessati a contare il numero di arrivi x di automobili in un minuto. La X è una v. a. e sappiamo che viene bene interpretata da una distribuzione di probabilità di Poisson. In questo caso non si manifesta alcun processo stocastico.

Cambiamo interesse. Siamo ora interessati a verificare come si distribuiscono gli arrivi nell'arco di tempo unitario (un minuto), ma anche come si evolve nel tempo questa sequenza di arrivi. Per esempio, in una giornata ci sono 1440 minuti; ognuno di questi presenta il verificarsi di un numero aleatorio $x \ge 0$ che deriva da una v.a. $X(\omega)$, supponiamo di Poisson. Avremo, quindi, una sequenza di variabili aleatorie di Poisson $X_t(\omega)$ con $t = 1, \dots, 1440$. Questo è un processo stocastico di v.a. *i.i.d.* Nella teoria dei segnali, lo studio probabilistico del loro comportamento è di natura stocastica perché non interessa tanto la probabilità che un certo segnale arrivi più o meno corretto in un dato intervallo di tempo, bensì come esso si comporta probabilisticamente in sequenze ordinate e lunghe di intervalli temporali (successione di variabili aleatorie).

Riferimenti bibliografici. Molti sono i testi che affrontano, a diversi livelli, l'argomento; qui si consiglia: Ross Sheldon M. (1996), *Stochastic Processes* (*Second Edition*), John Wiley & Sons, Inc, New York, ISBN 0-471-12062-6.